Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

I. Ozkan

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

- Opsiyon fiyatlama modeli finans/iktisat teorilerinin en başarılı Örneklerinden birisidir.
- Black-Scholes (BS) opsiyon fiyatlama modeli Avrupa tipi opsiyonların fiyatlarının analitik olarak hesaplanmasını sağlar.
- Risksiz bir getiriye sahip enstrümana yatırım yapma olanağınızı içerir.
- Opsiyonun fiyatının yalnızca dayanak varlığın fiyatının volatilitesine bağlı olduğunu gösterir.

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli: Varsayımlar

- Arbitraj olanağı yok,
- İşlem maliyeti yok,
- Risksiz faizden istenildiği kadar borçlanılabilir,
- İşlemler sürekli olarak yapılmakta (kesikli değil),
- Dayanak varlık riskli, istenildiği kadar alınabilir/satılabilir,
- Volatilite zaman içinde sabit,
- Notasyon: risksiz faiz: r, uygulama fiyatı: K, volatilite: σ, vade: T, dayanak varlık fiyatı: S_t

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli: Varsayımlar

- Sürekli bileşik getiri normal dağılıma sahip;

$$R_{0,t} = ln(\frac{S_t}{S_0}) \sim N\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Delta t, \sigma^2\Delta t\big)$$

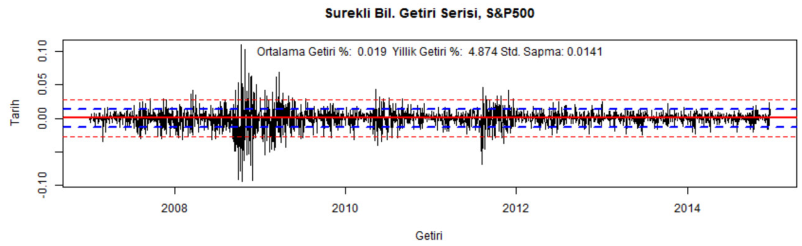
- μ, dayanak varlığın zamanla değişim hızı (drift),
- σ dayanak varlığın fiyatının volatilitesi,
- S_t dayanak varlığın fiyatı log-normal dağılıma sahip,
- Δ küçük bir değişimi ifade ediyor,

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli: Varsayımlar

- Varsayımlar tutarlı mı?
- Sürekli işlem, risksiz faizden istenildiği kadar borçlanılabilme, işlem maliyetinin olmaması piyasa ile uyumlu değil ancak yine de yaklaşık olarak kabul edilebilir (en azından büyük işlem yapanlar için)
- Dağılımsal varsayımlar? Özellikle sürekli bileşik olarak dayanak varlık fiyat getirisinin normal dağılıma sahip olması?
- En azından endekslerde bakma şansımız var.

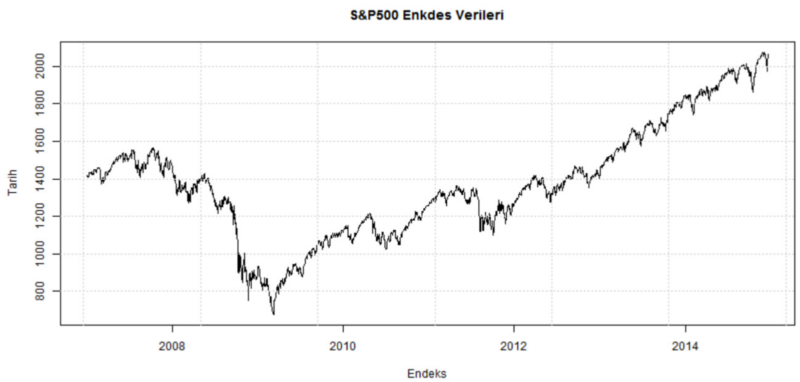
Endeksler ve Getirileri

Grafik S&P500 endeksinin günlük sürekli bileşik getirilerini göstermektedir. İlk gözlem, volatilitenin sabit olmadığıdır.



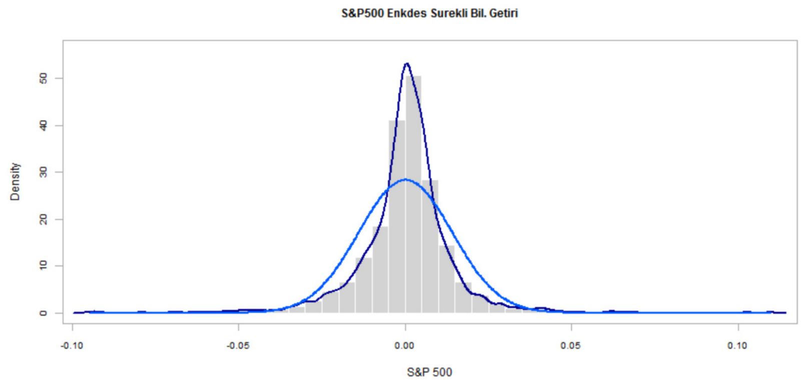
Endeksler ve Getirileri

Grafik S&P500 endeksinin günlük verilerini göstermektedir.



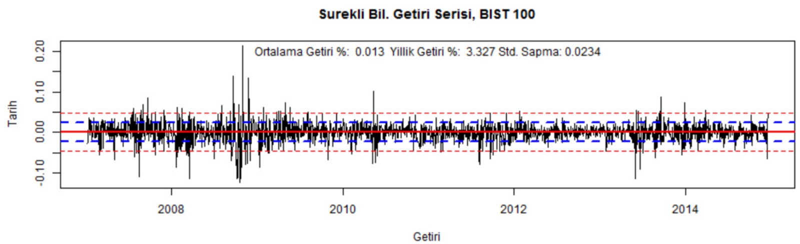
Endeksler ve Getirileri

Grafik S&P500 endeksinin günlük verilerinin sürekli bileşik getirisinin histogramını göstermektedir.



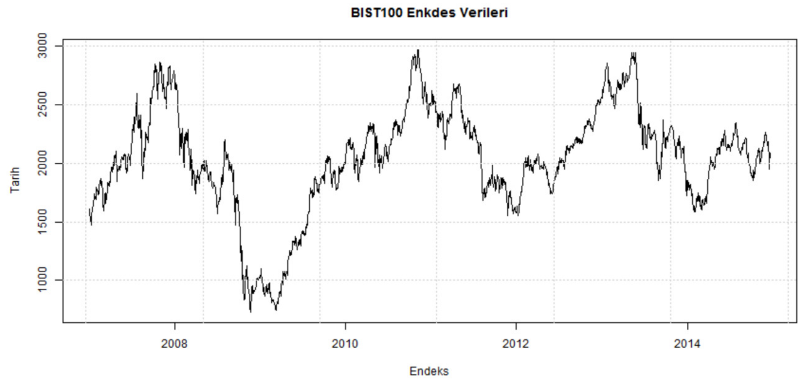
Endeksler ve Getirileri

Grafik BIST 100 endeksinin günlük sürekli bileşik getirilerini göstermektedir. Aynı şekilde, volatilitenin sabit olmadığı görülmektedir.



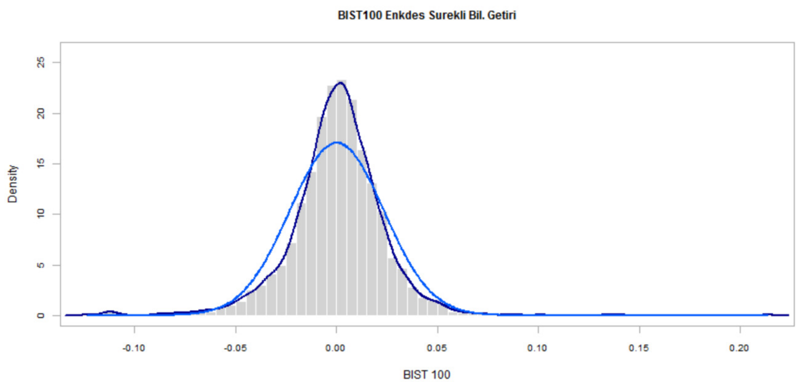
Endeksler ve Getirileri

Grafik BIST100 endeksinin günlük verilerini göstermektedir.



Endeksler ve Getirileri

Grafik S&P500 endeksinin günlük verilerinin sürekli bileşik getirisinin histogramını göstermektedir.



Endeksler ve Getirileri

- Hisseler genelde büyük negatif değişimlere, normalden daha yüksek tepelere ve şişman kuyruklara sahiptirler.
- Endekslerde büyük negatif değişimler daha az görünse de diğer özellikler yine belirgindir.
- Çarpıklık (skewness) negatif (BIST100: -0.0357 ve S&P 500: -0.3177) ve basıklık (kurtosis, normal dağılımda 3 olmalı) yüksek, (BIST100: 10.1842 ve S&P 500: 12.3447)
- Volatilite kümeleri var (Koşullu Heteroskedastisite)

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

- BS opsiyon fiyatlama modeli için öncelikle biraz Stokastik Differansiyel Denklemler (SDE) ve Ito's Lemma konusuna bakılmalı.
- Brownian Hareket, Wiener sürecinin bir özel halidir.

  Genelleştirilmiş hali,

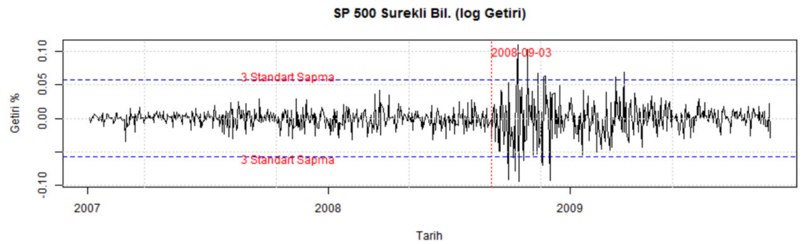
  $dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dw$

  dS: Fiyattaki küçük değişim,

  $\mu(S,t)$ Fiyattaki küçük değişimin zamanla değişen beklenen değişimi (drift),

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

$\sigma(S,t)$ Fiyattaki küçük değişimin zamanla değişen varyansı (volatilite, diffusion), w: Standart Brownian hareket,$w(0) = 0$, $w(t+dt) - w(t) = dw \sim N(0,dt)$, yani beklenen değeri sıfır ve varyansı dt olan rassal harekettir. SP 500 getiri serisinin volatilitesi 2008-09-03 tarihinde değişmiş gibi görünüyor.



S&P 500, Stokastik Differansiyel Denklem

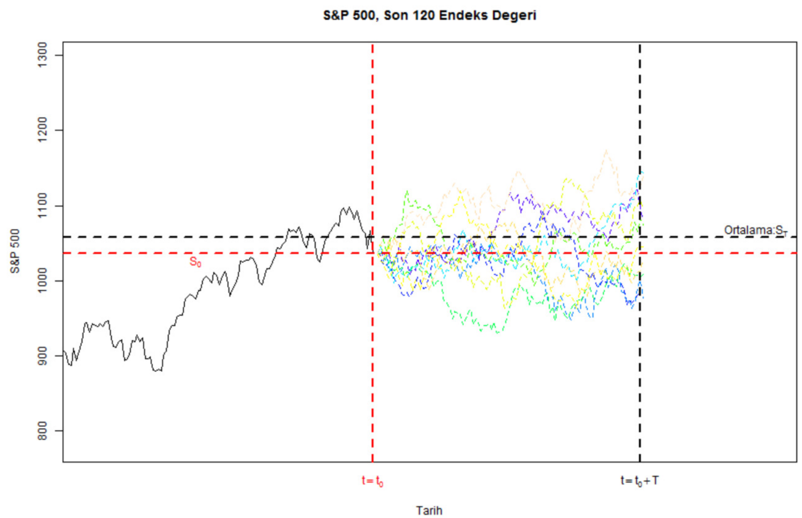
tekrar hatırlarsak,

$dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dw$ ve geometrik Brownian hareket,

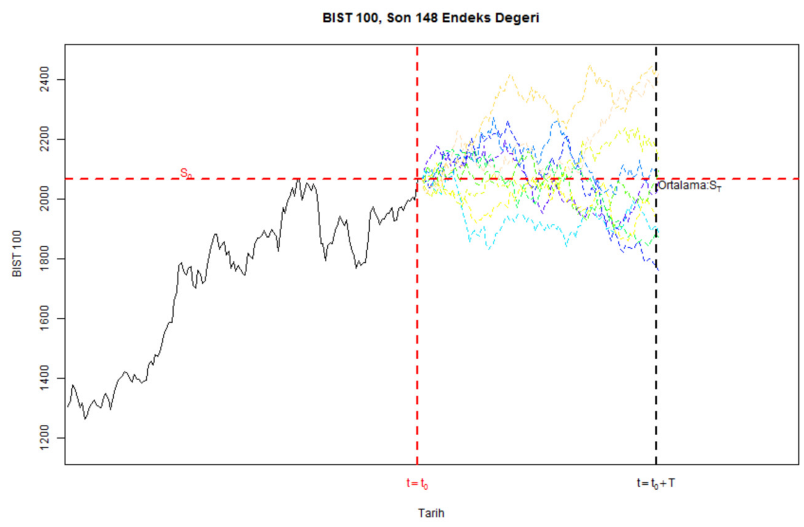
$dS = \mu \times S \times dt + \sigma \times S \times dw$

Örneğimizde kullandığımız S&P 500 için $\mu =$ 0.000288 ve $\sigma =$ 0.1012595 olarak tahmin edilmiştir. Aynı şekilde, ABD doları bazlı BIST100 serisi için, $\mu =$ 0.000403 ve $\sigma =$ 0.1030829 olarak tahmin edilmiştir.

S&P 500, SDE Simulasyon (10 Patika)



BIST 100 (USD), SDE Simulasyon (10 Patika)



Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Dayanak Varlık, S, aşağıdaki özelliklere sahip stokastik sürece sahip olsun,

$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$

yani, kısa bir süre içinde, beklenen değer, $\mu \times \Delta t$ ve volabilite, $\sigma \times sqrt\Delta t$ olarak yazılabilir. Burada,

μ yıllık beklenen getiri ve σ yıllık beklenen volatilitedir.

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Günlük, haftalık veya aylık getiri ve volatilite ise basitçe,

GÜNLÜK	HAFTALIK	AYLIK
n=252	n=52	n=12
$\mu = \frac{\mu}{252}$	$\mu = \frac{\mu}{52}$	$\mu = \frac{\mu}{12}$
$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{252}}$	$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{52}}$	$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{12}}$

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

$dS = \mu \times S \times dt + \sigma \times S \times dw$

$\frac{dS}{S} = \mu \times dt + \sigma \times dw$

Ito'nun lemması bu gibi durumlarda, $F(S,t)$ fonksiyonlarının türevinin (integralinin) hesaplanması için gereken matematiksel yaklaşımdır. Ito'nun lemması kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir,

$dF(S,t) = F_S \times dS + F_t \times dt + \frac{1}{2} F_{SS}\sigma^2 \times S^2 \times dt$

$F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$, $F_s = \frac{\partial F}{\partial s}$ ve $F_{SS} = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}$

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

dS yerine konulursa,

$$dF(S,t) = F_S(\mu S dt + \sigma S dw) + F_t dt + \tfrac{1}{2} F_{SS}\sigma^2 dt,$$

$$dF(S,t) = \{F_S \mu S + F_t + \tfrac{1}{2} F_{SS}\sigma^2 S^2\}dt + F_S \sigma S dw,$$

$F_t = 0$ olduğundan türev şu şekilde yazılabilir,

$$dF(S,t) = \{F_S \mu S + \tfrac{1}{2} F_{SS}\sigma^2 S^2\}dt + F_S \sigma S dw$$

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Risksiz portföy olarak,

$\Pi = \Delta \times S - c$,

S dayanak varlık ve c call opsiyonu. Bu portföyün küçük değişimi,

$d\Pi = \Delta dS - dc$, ve $c = f(S,t)$ olduğuna göre,

$$= \Delta(\mu S dt + \sigma S dw) - \Big(\{c_S \mu S + C_t + \tfrac{1}{2} c_{SS}\sigma^2 S^2\}dt + c_S \sigma S dw\Big),$$

Eğer $\Delta = c_S$ olarak seçilirse denklem şu şekilde yazılabilir,

$$d\Pi = \Big(-c_t - \tfrac{1}{2} c_{SS}\sigma^2 S^2\Big)dt,$$

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Bu durumda rassal bir bileşeni olmadığından portföy risksizdir. Etkin piyasalarda risksiz bir portföy ancak risksiz bir getiriye sahip olacaktır. Bu durumda risksiz getiriye sahip portföyün zaman fonksiyonu,

$$\Pi = \Pi \times e^{r \times t}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \Pi \times r \times e^{r \times t} \implies d\Pi = r\Pi dt$$

Denklemleri eşitlersek,

$$(-c_t - \tfrac{1}{2} c_{SS}\sigma^2 S^2)dt = r\Pi dt,$$

$$\implies \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - r\frac{\partial c}{\partial S} S - rc = 0,$$

Bu denklem Black-Scholes denklemi olarak da bilinir.

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

Bu kısmi differansiyel denklemin (partial differential equation) çözümü call opsiyonunun fiyat denklemidir, $c(S,t)$.

$$c(S,t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli

put-call paritesi kullanılarak put opsiyonu için de fiyat fonksiyonu,

$$p(S,t) = Ke^{-r(T-t)} - S + C(S,t)$$
$$= N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

olarak verilebilir. Burada, $N(.)$ kümülatif normal dağılım, S dayanak varlığın spot fiyat, K uygulama fiyatı, $T-t$ vadeye kalan süre, σ dayanak varlığın fiyatının volatilitesi, r risksiz faizdir.

Zımni (implied) Volatilite

Call (put) opsiyonu fiyat fonksiyonu, spot fiyat, uygulama fiyatı, vade, risksiz faiz ile gözlemlenmesi zor olan volatiliteye bağlıdır. Diğer değişkenler ya opsiyonun bir belirlenmiş parametresi ya da gözlemlenen değişkendir. Piyasalarda gözlemlenen call opsiyonu fiyatlarından dayanak varlığın fiyat volatilitesinin tahmini yapılabilir. Buna Zımni (implied) volatilite denmektedir.

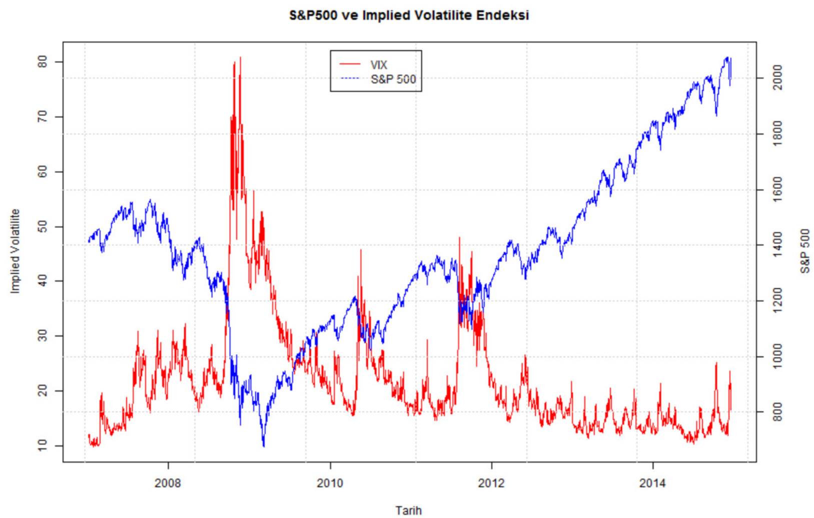
$c(\sigma,..) - c^* = 0$ $(p(\sigma,..) - p^* = 0)$, c^*: piyasada oluşan call opsiyonu fiyatı, bir kök bulma problemidir ve daha önceki derslerde üzerinde durulan Newton yöntemi ile çözülebilir.

Zımni (implied) Volatilite

Piyasalarda oluşan opsiyon fiyatları zaman içinde dalgalanmaktadır. Bu da doğal olarak implied volatilitelerin dalgalanmasına ve zaman içinde değişmesine yol açmaktadır. Bu yüzden farklı volatilite enstrümanları da piyasaya sunulmaktadır. Örneğin VIX endeksi S&P 500 endeksinin Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index kodudur.

Volatilite endeksleri zaman zaman korku endeksleri ve/veya piyasadaki tarafların anlaşmazlıkta olduğunu ifade eden ölçümlerdir. Benzer olarak, NASDAQ ve diğer endeksler için de volatilite enstrümanları bulunmaktadır.

VIX Enkdeksi



Volatilite Eğrisi

Volatilite eğrisi (volatility smile) impled volatilitenin uygulama fiyatı ile ilişkisinde gözlemlenen paterndir. Aynı vade için uygulama fiyatı spot varlık fiyatından önemli bir farka sahip olan (ya çok küçük ya da çok büyük) opsiyonların fiyatları ve dolayısı ile volatiliteleri teorik olarak beklenen değerlerinden yüksek olmaktadır.

Volatilite Eğrisi