Gravite ve Yükseklik

Kamil Teke
Hacettepe Üniversitesi
Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisligi Bölümü

Yer'in gravite alanındaki degişimlere neden olan kitle hareketleri

- Katı Yer, okyanus ve atmosfer gel-gitleri
- Okyanus akıntıları ve okyanus tabanı basıncı değişimleri
- Yeraltı sularının kitle dağılımındaki değişimler (hidrolojik devir)
- Jeoidin içindeki kitle dağılımı değişimi: konveksiyon akımları
- Tektonik plaka hareketleri ve depremler
- Post-glacial rebound
- Global deniz seviyesi yükselmesi (1.8 mm/yıl) (Douglas, 1991)
- Bölgesel deformasyonlar

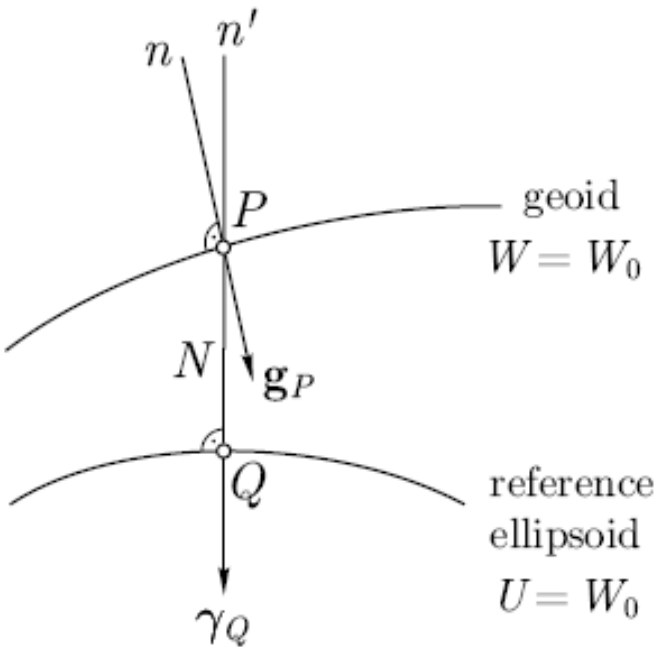
- Jeoidin belirlenmesi (basit örnek)
- Topoğrafya ve serbest hava indirgemesi (basit örnek)

Jeoidin belirlenmesi (basit örnek)

$$g_P = g_{topo} - A_T + F$$

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

$$\Delta g \underset{Inverse-Stokes}{\overset{Stokes}{\rightleftarrows}} N$$



$$\underline{\zeta(\theta,\lambda)_{WGS84} + C(\theta,\lambda) = N(\theta,\lambda)_{WGS84->EGM\,2008}}$$

$$C(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{n} \left(\overline{CC}_{nm} \cos m\lambda + \overline{CS}_{nm} \sin m\lambda \right) \overline{P}_{nm}(\cos\theta)$$

Bernhard Hofmann-Wellenhof ve Helmut Moritz (2006) Physical Geodesy, Second Edition, Springer, Wien, NewYork, ISBN-10 3-211-33544-7.

Pavlis, N.K., S.A. Holmes, S.C. Kenyon, and J.K. Factor, An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008.

Gravite indirgemeleri (basit örnek)

Bouguer indirgemesi: $A_B = 2\pi G\rho H = 0.1119H\ (mgal)$ eger $\rho = 2.67\ g\ cm^{-3}$

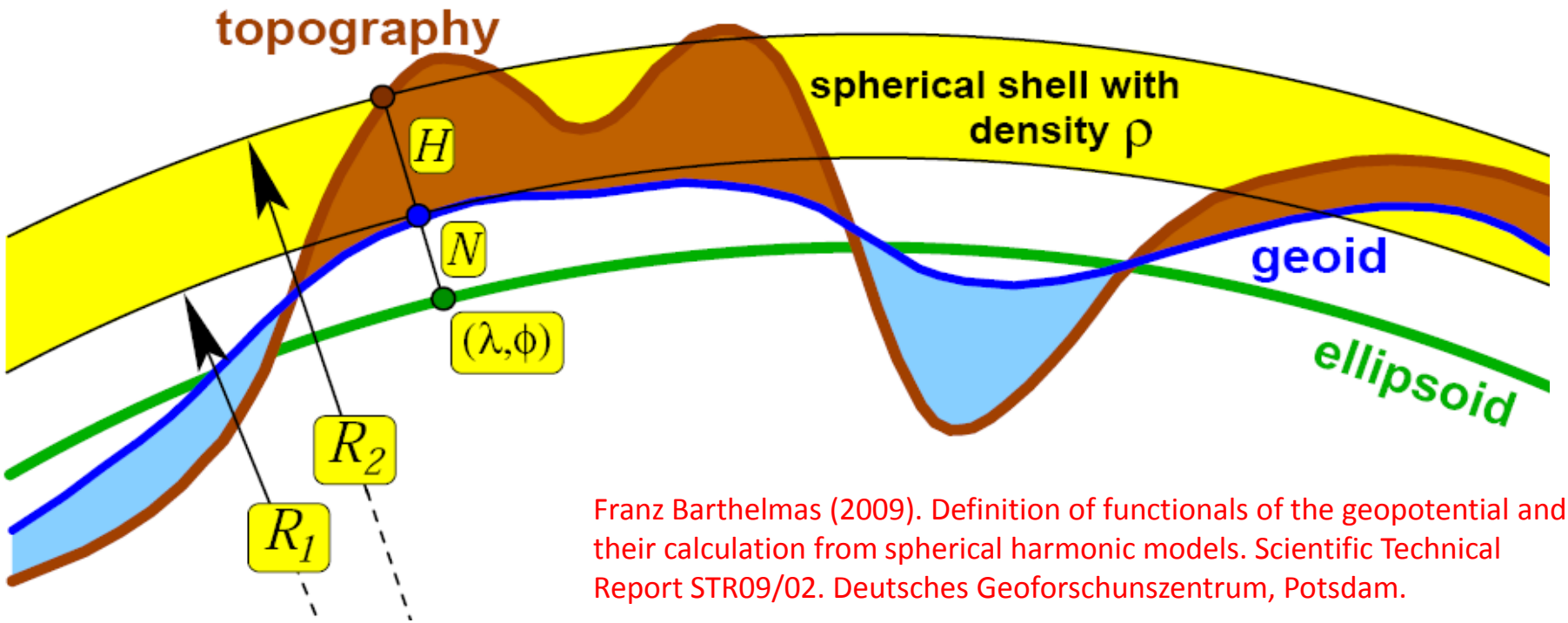
Spherical shell approximation: $A_{SS} = 4\pi G\rho H = 0.2238H\ (mgal)$ eger $\rho = 2.67\ g\ cm^{-3}$

Serbest hava indirgemesi: $F = -\dfrac{\partial g}{\partial H} H \doteq -\dfrac{\partial \gamma}{\partial h} H \doteq 0.3086H\ (mgal)$

$\dfrac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2$ (serbest hava gravite gradyanı)

Olgunlaştırılmış Bouguer indirgemesi: $g_B = g - A_B + A_t + F$

Bouguer anomalisi: $\Delta g_B = g_B - \gamma$



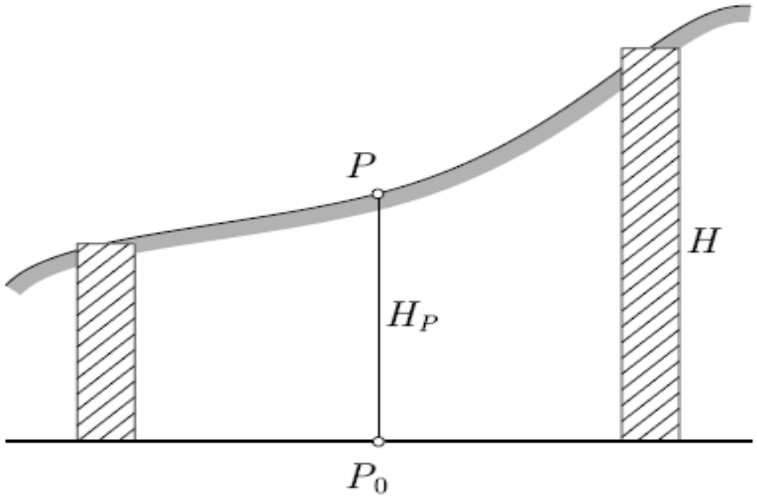
Franz Barthelmas (2009). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models. Scientific Technical Report STR09/02. Deutsches Geoforschunszentrum, Potsdam.

Arazi düzeltmesi (basit örnek)

$$A_T = A_B - A_t$$

$$A_T = \sum \Delta A$$

$$g_B = g - A_T + F$$



Örnegin: EGM2008 → DEM: SRTM 3’’(Dijital yükseklik/arazi modelleri)

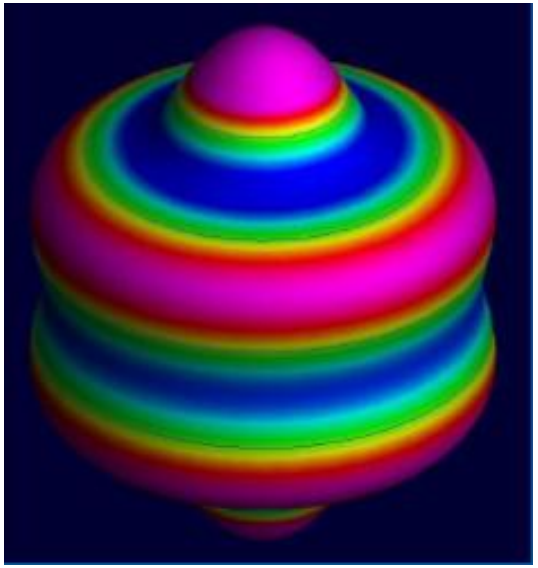
IDEMS (IGFS), DEM ürünleri : SRTM, ACE, ACE2, ASTER, GLOBE, GTOPO30,

Topografya (topography/terrain) modelleri yüzey küresel harmonik fonksiyonlarina dönüstürülebilir (Sneeuw, 1994).

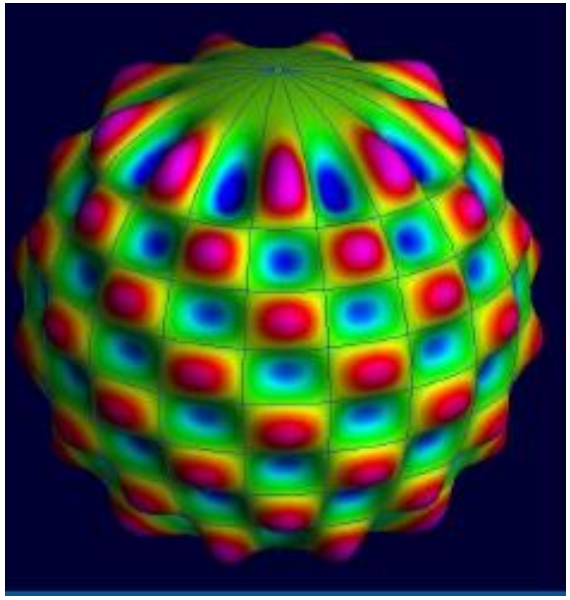
$$H(\theta,\lambda) = R\sum_{n=0}^{n_{\max}}\sum_{m=0}^{n}\left(\overline{HC}_{nm}\cos m\lambda + \overline{HS}_{nm}\sin m\lambda\right)\overline{P}_{nm}(\cos\theta)$$

- Gök cisimlerinin Yer’in dış gravite alanı içeresinde oluşturduğu gel-git potansiyellerinin hesabı
- Gel-git jeoid çeşitleri

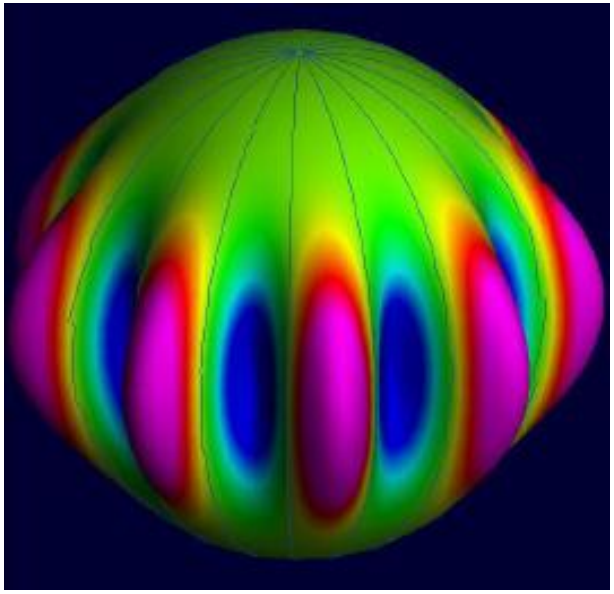
Ay'ın ve Güneş'in Yer'in dış gravite alanında oluşturdukarı bozucu (gel-git) gravite potansiyelleri



V_{20} 2.derece, 0. mertebe küresel harmonik fonksiyonu: **Zonal gel-git potansiyeli** (1 ay boyunca). Uzun periyotlu ge-gitlerdir.



V_{21}, 2.derece, 1. mertebe küresel harmonik fonksiyonu: **Tesseral gel-git potansiyeli** (1 gün boyunca). Günlük periyoda sahip gel-gitlerdir.

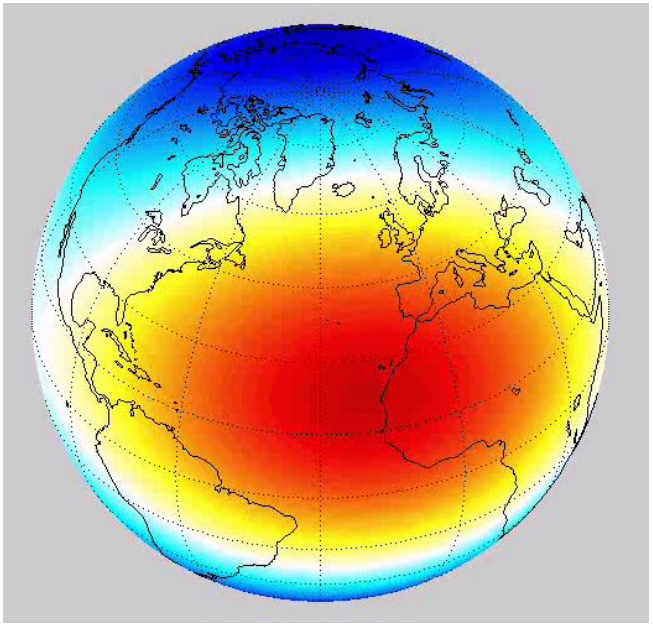


V_{22}, 2.derece, 2. mertebe küresel harmonik fonksiyonu: **Sektoral gel-git potansiyeli** (1 gün boyunca). 12 saat periyoda sahip gel-gitlerdir.

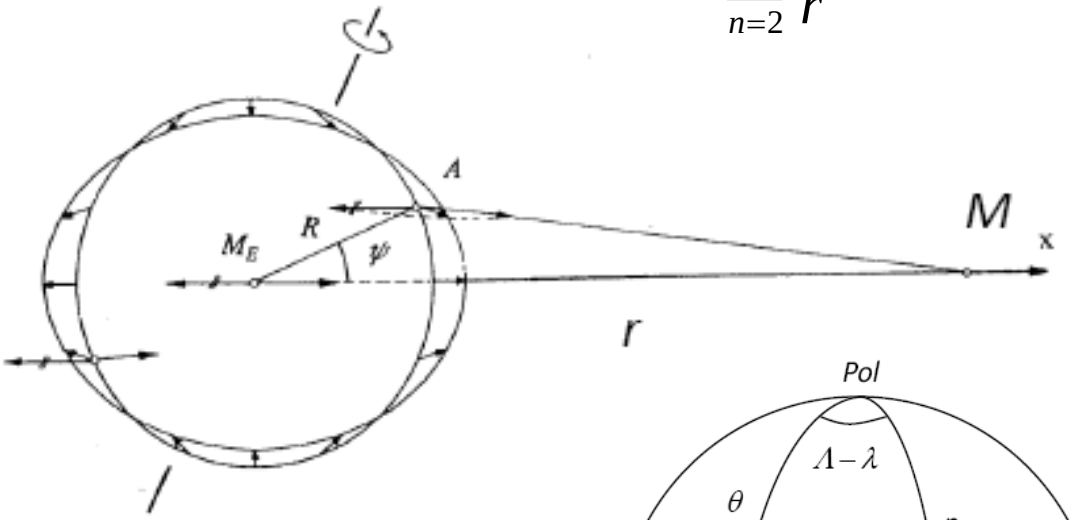
Petit G., and Luzum B. (2010). IERS Conventions 2010, IERS Technical Note ; 36, Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, ISBN 3-89888-989-6.

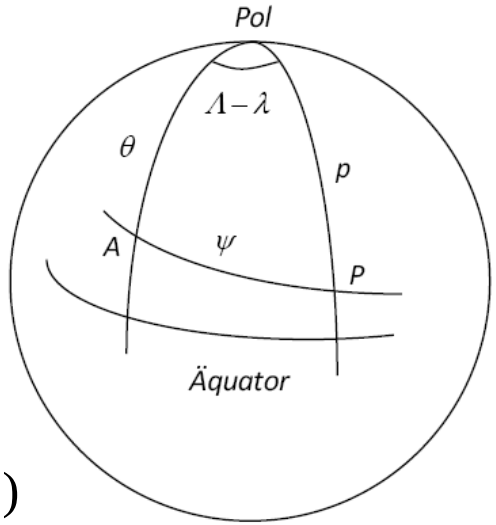
Gök cisimlerinin (Ay'ın, Güneş'in ve güneş sistemi gezegenlerinin) Yer'in dış gravite alanı içerisindeki gel-git gravite potansiyelleri

$V_{20}+V_{21}+V_{22}$: **Toplam gel-git potansiyeli**



$$V(A) = GM \sum_{n=2}^{n_{\max}} \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi)$$





$$V_{20} = GM \frac{R^2}{r^3} P_{20}(\cos\theta) P_{20}(\cos p)$$

$$V_{21} = \frac{1}{3} GM \frac{R^2}{r^3} P_{21}(\cos\theta) P_{21}(\cos p) \cos(\Lambda - \lambda)$$

$$V_{22} = \frac{1}{12} GM \frac{R^2}{r^3} P_{22}(\cos\theta) P_{22}(\cos p) \cos 2(\Lambda - \lambda)$$

Gel-git tanımlarına göre jeoid çeşitleri (IERS Konvansiyonları)

- Ölçülen jeoid (instantaneous geoid) (t epogu):

$$W = W_0 = V_{geo} + V_{centrifugal} + V_{tidal}^{permanent} + V_{tidal}^{periodic} + V_{deformation}^{permanent} + V_{deformation}^{periodic}$$

- Ortalama (mean) jeoid (oşinografi) (≈mean ocean surface):

$$W = W_0 = V_{geo} + V_{centrifugal} + V_{tidal}^{permanent} + V_{deformation}^{permanent}$$

- Sıfır gel-git (zero-tide) jeoidi (Jeodezi):

$$W = W_0 = V_{geopotential} + V_{centrifugal} + V_{deformation}^{permanent}$$

- Gel-git bağımsız (tide-free) jeoid (Jeodezi)

(Tide-free crust : örnegin, ITRF2008, VTRF2008, ...)

$$W = W_0 = V_{geo} + V_{centrifugal}$$

Nominal love numbers

Petit G., and Luzum B. (2010). IERS Conventions 2010, IERS Technical Note ; 36, Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, ISBN 3-89888-989-6.

- Gravite potansiyeli alanı bileşenlerinin hesabı
  - Bruns (T -> N)
  - Stokes (Δg -> N) – yüzey integrali
  - Pizetti (Δg -> T) – yüzey integrali
  - Venning Meinesz (Δg -> (ʒ, η)) – yüzey integrali

Stokes formüllerinden jeoid ondülasyonunun hesabı

Stokes formülü –Stokes integrali (Stokes, 1849)
Determine the geoid from gravity data

$$N_p(\varphi,\lambda)=\frac{R}{4\pi\gamma_0}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Delta g(\varphi',\lambda')\cdot S(\psi)\cdot\cos\varphi'\cdot d\varphi'\cdot d\lambda'$$

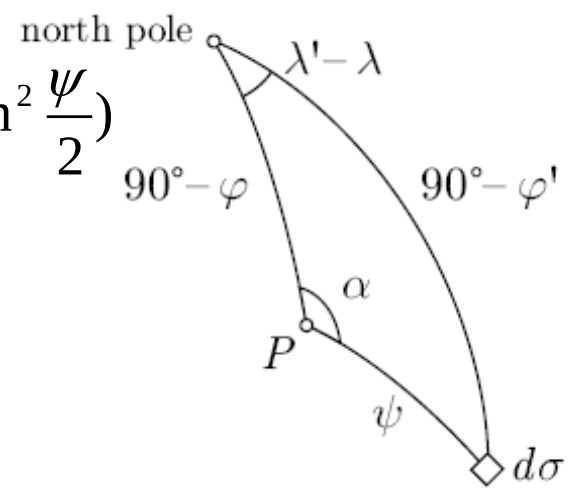
φ,λ : p hesap noktasının küresel cografi koordinatları

φ',λ' : kaynak noktanın (yüzey elemanı) küresel cografi koordinatları

ψ: küresel uzaklık

S(ψ): Stokes fonksiyonu

$$S(\psi)=\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos\psi-3\cos\psi\ln(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2})$$



$$\psi=\cos^{-1}[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda'-\lambda)]$$

Bruns formülünden jeoid ondülasyonunun hesabı

$$N_1(\lambda,\varphi) = \frac{W(0,\lambda,\varphi) - U(0,\varphi)}{\gamma(0,\varphi)} = \frac{T(0,\lambda,\varphi)}{\gamma(0,\varphi)}$$

Bruns formülü
(iteratif yaklaşım)

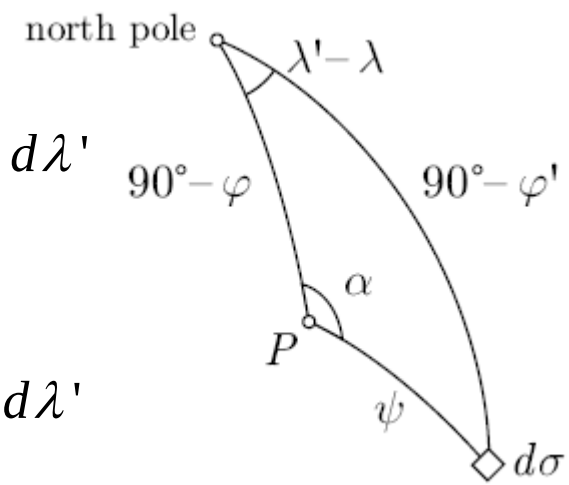
$$N_{i+1}(\lambda,\varphi) = N_i(\lambda,\varphi) + \frac{W(N_i,\lambda,\varphi) - U(N_i,\varphi)}{\gamma(0,\varphi)}$$

Gravite anomalilerinden (Δg) çekül sapması bileşenlerinin (ʒ, η) hesabı

Venning Meinesz, 1928

$$\xi(\varphi,\lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\varphi',\lambda') \cdot \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi' \cdot d\varphi' \cdot d\lambda'$$

$$\eta(\varphi,\lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\varphi',\lambda') \cdot \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi' \cdot d\varphi' \cdot d\lambda'$$



Gravite anomalilerinden (Δg) bozucu potansiyel (T) hesabı

Pizetti, 1911

$$T_p(r,\varphi,\lambda) = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(R,\varphi',\lambda') \cdot S(r,\psi) \cdot d\varphi' \cdot d\lambda'$$

φ, λ : p hesap noktasının küresel cografi koordinatları

φ', λ' : kaynak noktanın (yüzey elemani) küresel cografi koordinatları

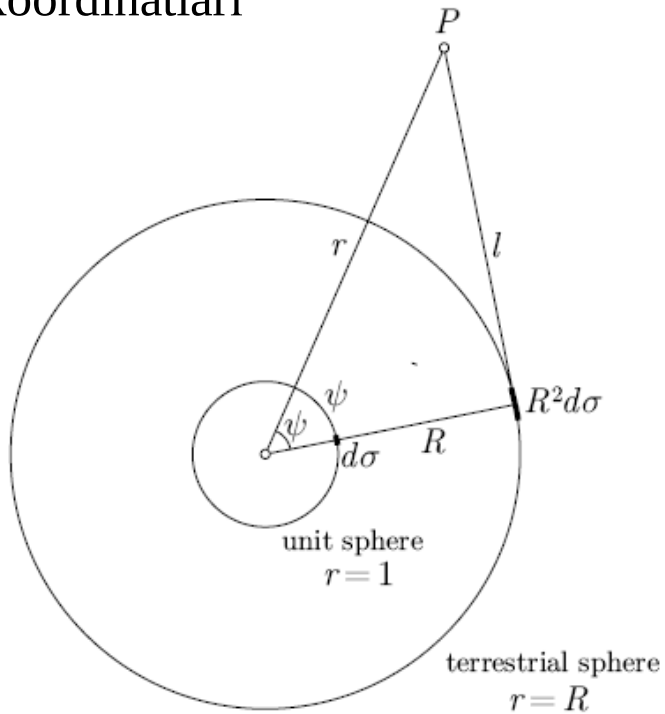
ψ: küresel uzaklık

S(r, ψ): Stokes fonksiyonu

$$S(r,\psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - 3\frac{Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}\cos\psi\left(5 + 3\ln\frac{r - R\cos\psi + l}{2r}\right)$$

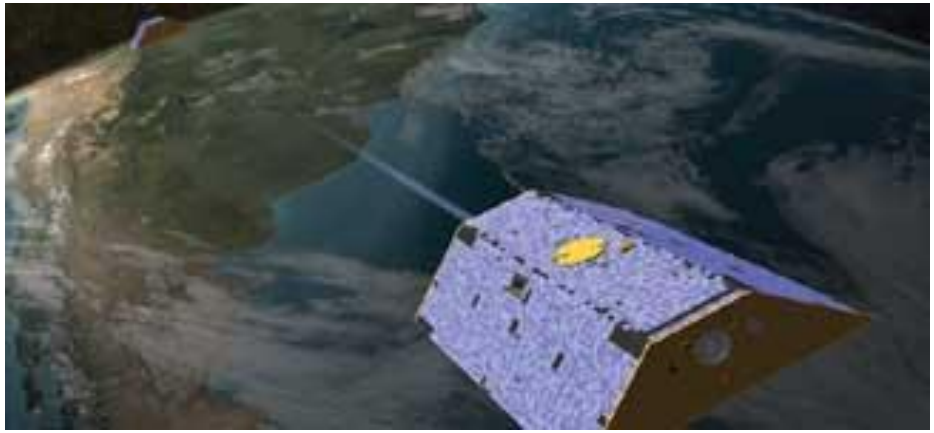
$$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\psi}$$

$$\psi = \cos^{-1}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda)]$$



- Uydu gravite misyonlarına genel bakış
  - GRACE
  - GOCE

GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) uydu gravite misyonu



- 17 Mart 2002
- Yükseklik : 300-500 km
- Aralarindaki mesafe ~200 km
- 89°-kutupsal
- Bilinmeyenler: Yerin gravite anomalileri
- Ölçüler: iki uydunun arasındaki uzunluk değişimleri

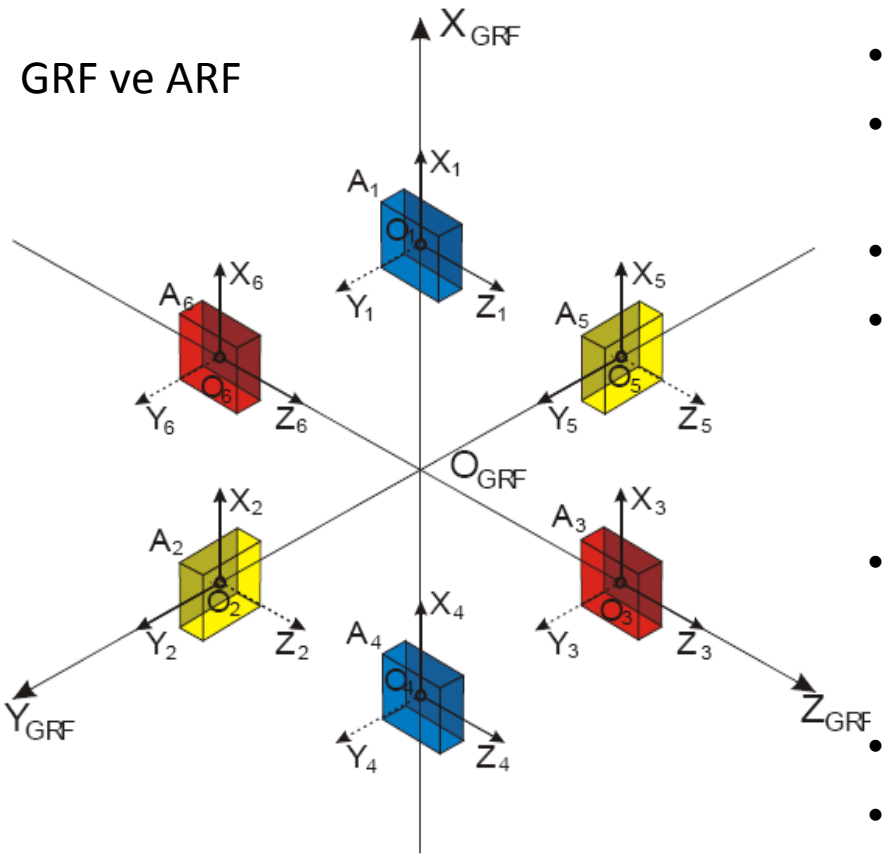
- German Space Agency's Challenging Minisatellite Payload (CHAMP) uydu gravite misyonundan elde edilen deneyimler üzerine geliştirilmiş bir sistemdir.
- US Space Agency, NASA ve German Space Agency, DLR ortak projesidir.
- Her iki uydunun ağırlık merkezine yerleştirilmis ivme ölcerler uydulardaki gravitasyonel olmayan ivmelenmeleri (örnegin, atmosfer sürüklenmesi) ölçer. Böylece sadece gravitasyonel degisimlerin sonucu olusan ivmelenmeler modellenebilir.
- Yer'in her ay, aylık ortalama global gravite alanı.

http://www.csr.utexas.edu/grace/

Ayan T. ve Akyılmaz O. (2006) Yeryuvarı gravite alanının Grace uydu verilerinden bulanık çıkarım verileri ile modellenmesi. Harita Dergisi, 135, 10-25.

Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation (GOCE) uydu gravite misyonu

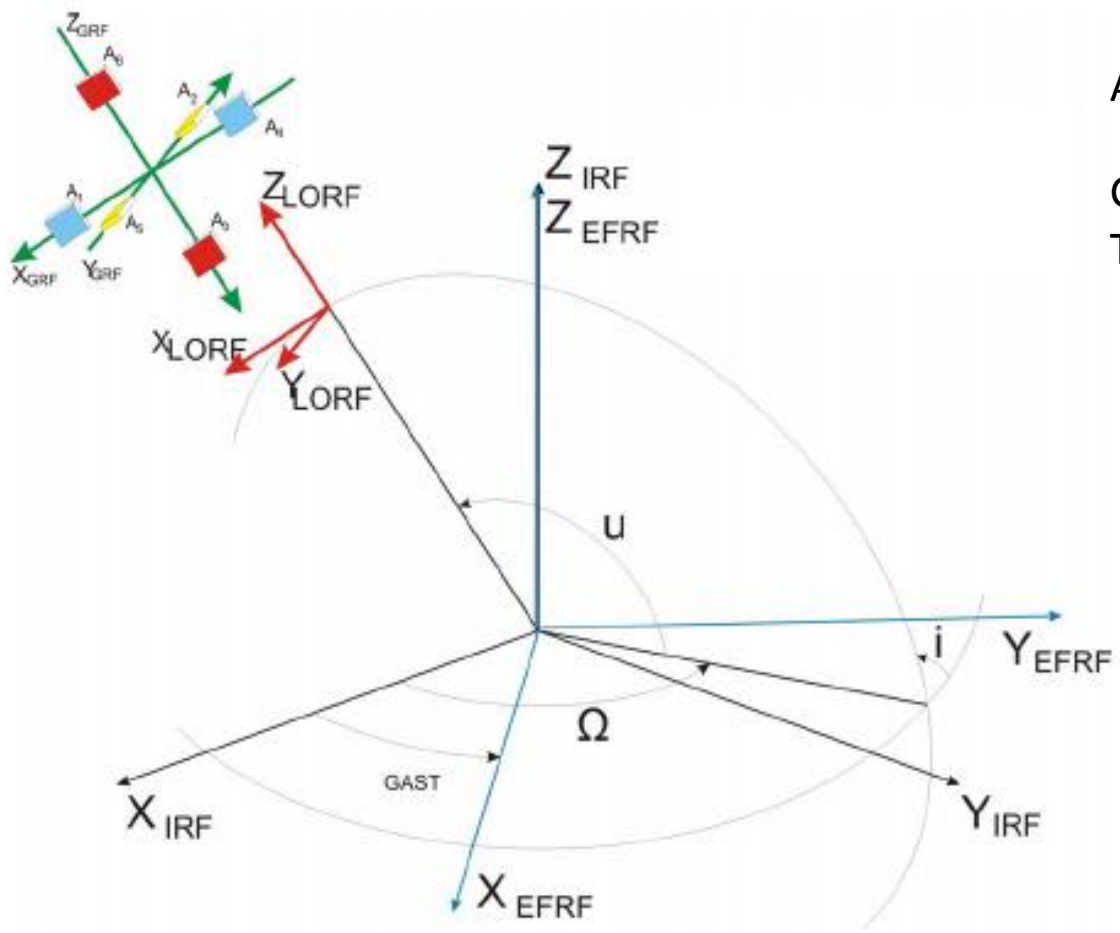
GRF ve ARF



- Mart 2009.
- Gradiometer iceren ilk uydu .
- Satellite to satellite tracking (SST) : GPS-GOCE
- Satelite gravity gradiometer (SGG)
- SGG: gravite gradyanlari 10^{-6} x g (1 mgal), jeoidi 1-2 cm duyarlikla belirliyor. Yarim dalga boyu 100 km olan global gravite alani.
- 3 ortagonal eksenin uclarinda (50 cm) 6 adet ivme ölcer iceren bir gradyometreye sahip.
- İvmeölcerlerin prezisyonu : 10^{-12} ms^{-2} /$Hz^{1/2}$
- SST: 1-2 cm dogrulukta GPS konum bilgisi ile uzun dalga boylu gravite alani.
- Yildiz sensörleri ile gravimetre ölcülerinin kombinasyonlarindan inersiyal uzaya göre dönüklükler.

http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/; Rummel vd., 2004;
Karslıoglu M.O. (2006) Uydu gradyometresi ve GOCE uydusu. Harita Dergisi, 135, 26-41.

GOCE – Konum ve zaman referans sistemleri, ürünlerden örnekler



ARF -> GRF -> LORF -> EFRF -> IRF

GPST = TAI – 19s = UTC + 15
TAI-UTC=34s (1 temmuz 2012)

L2 Products

- GRF gravite gradyanlari
- LORF gravite gradyanlari
- Hassas yörüngeler
- GOCE gravite alani modeli
  - V, Δg, N, (ʒ,η)
- Zamana bagli gravite degisimlerinden kaynaklanan gravite gradyanlari düzeltmeleri.

...

Ext. Data: ERP (IERS), GPS orbit, clock, ground GPS station data (IGS), SLR data (ILRS), Atmosphere (ECMWF), planetary ephemeris (JPL421-NASA), tide models, DTM, external info. of gravity field

http://www.esa.int/SPECIALS/GOCE/; Rummel vd., 2004;
Karslıoglu M.O. (2006) Uydu gradyometresi ve GOCE uydusu. Harita Dergisi, 135, 26-41.

- Global Gravite Modellerinin Küresel Harmonik Fonksiyonlara açılımları

$$(GM^{V}, a^{V}, \bar{C}^{V}_{nm}, \bar{S}^{V}_{nm}) \Rightarrow V(r,\theta,\lambda)$$

$$(GM^{REF}, a^{REF}, \bar{C}^{U}_{nm}, \bar{S}^{U}_{nm}) \Rightarrow U(r,\theta,\lambda)$$

$$(GM^{REF}, a^{REF}, \bar{C}^{T}_{nm}, \bar{S}^{T}_{nm}) \Rightarrow T(r,\theta,\lambda)$$

$$(GM^{REF}, a^{REF}, \bar{C}^{T}_{nm}, \bar{S}^{T}_{nm}, \frac{T}{\gamma}) \Rightarrow N(r,\theta,\lambda)$$

$$(GM^{REF}, a^{REF}, \bar{C}^{T}_{nm}, \bar{S}^{T}_{nm}, -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{\gamma}T) \Rightarrow \Delta g(r,\theta,\lambda)$$

$$(GM^{REF}, a^{REF}, \bar{C}^{T}_{nm}, \bar{S}^{T}_{nm}, \frac{\partial N}{\partial \theta}, \frac{\partial N}{\partial \lambda}) \Rightarrow \xi(r,\theta,\lambda), \eta(r,\theta,\lambda)$$

Kartezyen koordinatlar için Gradyan ve Laplace operatörleri, Laplace kısmi diferansiyel denklemi

Gradyan ($Nabla$) operatörü: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ (vektör)

Laplace operatörü: $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (skaler)

$$\vec{g} = \nabla V = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad \nabla^2 V = 0$$

Hobson, 1931; Freeden, 1985; Bronshtein vd., 2004

Yerin dış gravite potansiyel alanı (Küresel Harmonik Fonk.)

yüzey küresel harmonik fonksiyonu

$$Y_n(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\left[\overline{C}_{nm}^{GOCE}\cos m\lambda+\overline{S}_{nm}^{GOCE}\sin m\lambda\right]\overline{P}_{nm}(\cos\theta)$$

$$V(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}Y_n(\theta,\lambda)$$

küresel harmonik fonksiyon

V = W - Z

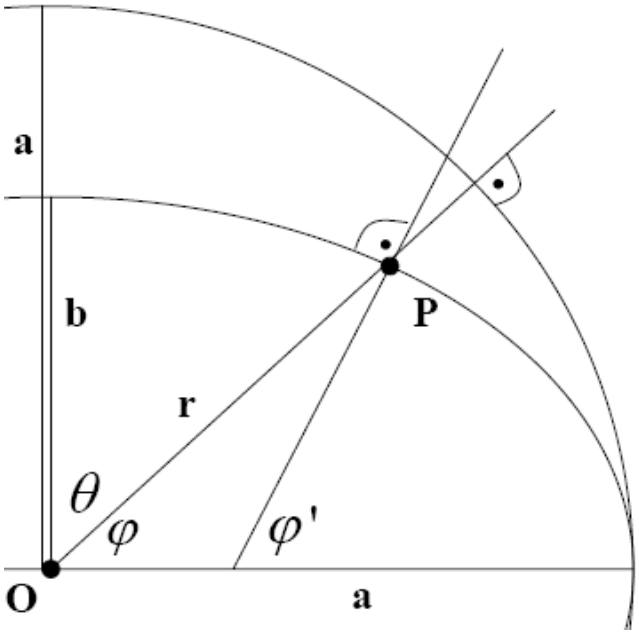
$$\begin{Bmatrix}\overline{C}_{nm}\\ \overline{S}_{nm}\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}}\cdot\begin{Bmatrix}C_{nm}\\ S_{nm}\end{Bmatrix}$$

$$\overline{P}_{nm}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}\cdot P_{nm}(\cos\theta)$$

φ : jeosantrik enlem (θ=90°-φ)

φ' : jeodezik (elipsoidal) enlem (δ'=90°-β')

β : indirgenmis enlem (δ=90°-β)



GOCE Level 2 product data handbook. Issue: 4.3. Doc. Nr: GO-MA-HPF-GS-0110; Torge 2001

Normal gravite potansiyel alanı için küresel harmonik fonksiyon Stokes katsayılarının hesabı

$$(a,\ f, GM, \omega) \Rightarrow U, \gamma_0, \gamma_h, \ldots$$

$$U(r,\theta) = \frac{GM}{r}\left(\bar{C}_0^{REF} + \sum_{n=2(2)}^{8}\left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{C}_n^{REF}\bar{P}_n(\cos\theta)\right)$$

$$\bar{C}_{2k}^{REF} = (-1)^k \frac{3e^{2k}}{(2k+3)(2k+1)\sqrt{4k+1}}\left[1+\frac{2}{3}k\left(1-\frac{m_\gamma e'}{3q_0}\right)\right]$$

$$n = 2k\ (k = 1, 2, 3, 4) \quad ; \bar{C}_0^{REF} = 1; \bar{C}_2^{REF}; \bar{C}_4^{REF}; \bar{C}_6^{REF}; \bar{C}_8^{REF}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^{GOCE(s)} \\ \bar{S}_{nm}^{GOCE(s)} \end{Bmatrix} = \left(\frac{GM^{GOCE}}{GM^{REF}}\right)\left(\frac{a^{GOCE}}{a^{REF}}\right)^n \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^{GOCE} \\ \bar{S}_{nm}^{GOCE} \end{Bmatrix}$$

$$T = V + Z - (U + Z)$$

$$\bar{C}_{n0}^{T} = \bar{C}_{n0}^{GOCE(S)} - \bar{C}_n^{REF} \quad ; \bar{C}_{00}^{T} = \bar{C}_{00}^{GOCE(S)} - 1$$

$$n = 0, 2, 4, 6, 8 \text{ hariç} \Rightarrow \bar{C}_{nm}^{T} = \bar{C}_{n0}^{GOCE(S)} \quad ; \bar{S}_{nm}^{T} = \bar{S}_{n0}^{GOCE(S)}$$

GOCE Level 2 product data handbook. Issue: 4.3. Doc. Nr: GO-MA-HPF-GS-0110.

Bozucu gravite potansiyeli, gravite anomalisi, jeoid yüksekligi, çekül sapması bileşenlerinin küresel harmonik fonksiyonlara açılımı

Bozucu gravite potansiyellerinin küresel harmonik fonksiyona açılımı $\bar{C}_{nm}^{T};\bar{S}_{nm}^{T}$

$$T(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}Y_n(\theta,\lambda)$$

Gravite anomalilerinin küresel harmonik fonksiyona açılımı $\bar{C}_{nm}^{T};\bar{S}_{nm}^{T}$

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

$$\Delta g(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r^2}\sum_{n=0}^{n_{\max}}(n-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n}Y_n(\theta,\lambda) \quad \Leftarrow \quad \approx -\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2}{a}T$$

Jeoid yüksekliklerinin küresel harmonik fonksiyona açılımı $\bar{C}_{nm}^{T};\bar{S}_{nm}^{T}$

$$N(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r\gamma}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}Y_n(\theta,\lambda) \quad \Leftarrow \quad N=\frac{T}{\gamma}$$

Çekül sapması bileşenlerinin (ʒ, η) küresel harmonik fonskiyona açılımı $\bar{C}_{nm}^{T};\bar{S}_{nm}^{T}$

$$\xi=\frac{1}{a}\frac{\partial N}{\partial\theta} \quad ; \quad \eta=-\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial N}{\partial\lambda} \quad \left.\begin{matrix}\xi(r,\theta,\lambda)\\ \eta(r,\theta,\lambda)\end{matrix}\right\}$$

GOCE Level 2 product data handbook. Issue: 4.3. Doc. Nr: GO-MA-HPF-GS-0110.

Yer'in gravite alanı küresel harmoniklerinin bazı özellikleri

$(R/r)^n$: potansiyel ondulasyonlarının genliklerinin küçülme ve büyüme ölçeği

$C_{10}^V, C_{11}^V, S_{11}^V$: Jeoid ve normal elipsoid orjinleri arasındaki kayıklıklar

C_{21}^V, S_{21}^V : Jeoidin dönme kutbunun koordinatları (inersiyal tensör)

Gravite alanının en küçük temsil edilebilirlik çözünürlüğü

en kısa yarım dalga boyu $\Rightarrow a_{\min}(n_{\max}) \approx \dfrac{\pi R}{n_{\max}}$ (1) veya $a_{\min}(n_{\max}) = 4\arcsin\left(\dfrac{1}{n_{\max}+1}\right)$ (2)

maksimum derece	Stokes katsayısı sayısı	çözünürlük			
		eşitlik (1)		eşitlik (2)	
n_{max}	C_{nm}, S_{nm}	[derece]	[km]	[derece]	[km]
75	5776	2.4	266.667	3.016	335.073
180	32761	1.0	111.111	1.266	140.690
360	130321	0.5	55.556	0.635	70.540

$N_{GPS/Nivelman} - N_{global_gravity_model}$

Maksimum d/o : 360

Karesel ortalama hata (RMS) : cm

	GRACE	GRACE	GRACE	GRACE	GOCE + GRACE	GRACE
Bölge (nivelman noktasi sayisi)	GGM03C	EIGEN-GLO4C	EIGEN-5C	EIGEN-51C	EIGEN-6C	EGM2008 till d/o 360
Europe (1234)	33.3	33.6	30.2	28.8	27.5	26.9
Germany (675)	18.8	17.8	15.2	14.8	15.4	14.2
Canada (1930)	27.8	25.3	25.1	24.4	22.9	22.9
USA (6169)	34.5	33.9	33.9	33.3	31.6	31.8
Australia (201)	25.8	24.4	24.3	23.3	23.6	23.6

GRACE science team meeting program, 8-10 August 2011, Austin, Texas.
http://www.csr.utexas.edu/grace/publications
http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/

- Yükseklik kavramı ve yükseklik çeşitleri
- Düşey datum ve düşey kontrol ağları (örnekler)

Yükseklik çesitleri ve nivelman ile bulunan yükseklik farkına getirilen düzeltmeler

$$C = W_0 - W_p = -\int_{P_0}^{P} dW = \int g dn$$

$$H^{dyn} = \frac{C}{\gamma_0^{45}}$$

$$\Delta H_{AB}^{dyn} = \Delta n_{AB} + DC_{AB}$$

$$DC_{AB} = \int_A^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} dn \doteq \sum_A^B \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n_i$$

$$H^* = \frac{C}{\bar{g}}$$

$$\Delta H_{AB}^* = \Delta n_{AB} + OC_{AB}$$

$$OC_{AB} = \sum_A^B \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n_i + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^* - \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B^*$$

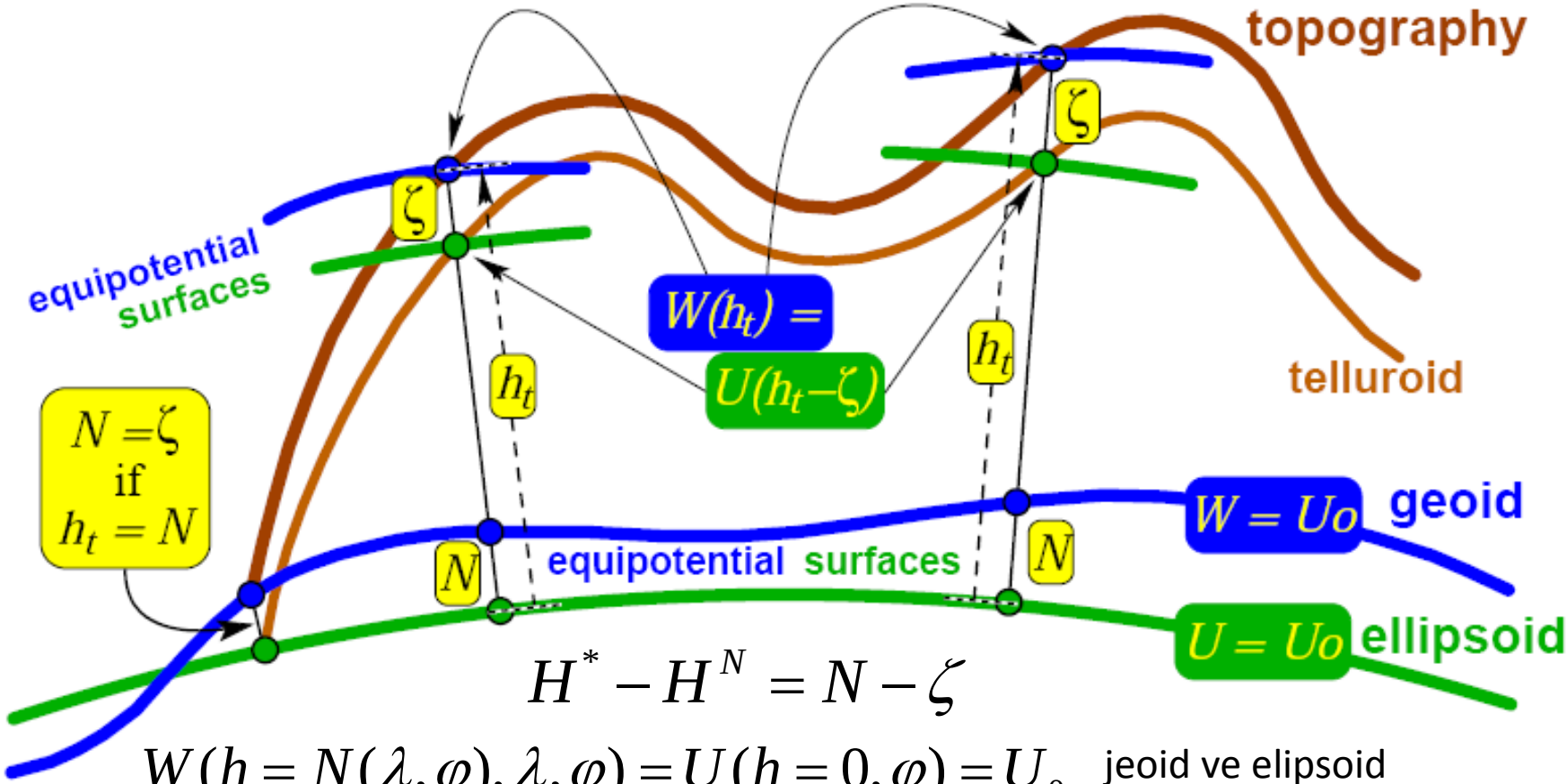
$$H^N = \frac{C}{\bar{\gamma}}$$

$$\Delta H_{AB}^N = \Delta n_{AB} + NC_{AB}$$

$$NC_{AB} = \sum_A^B \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^N + \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B^N$$

Bernhard Hofmann-Wellenhof ve Helmut Moritz (2006) Physical Geodesy, Second Edition, Springer, Wien, NewYork, ISBN-10 3-211-33544-7.

Jeoid yüksekliği, yükseklik anomalisi, telluroid, kojeoid



$$H^{*} - H^{N} = N - \zeta$$

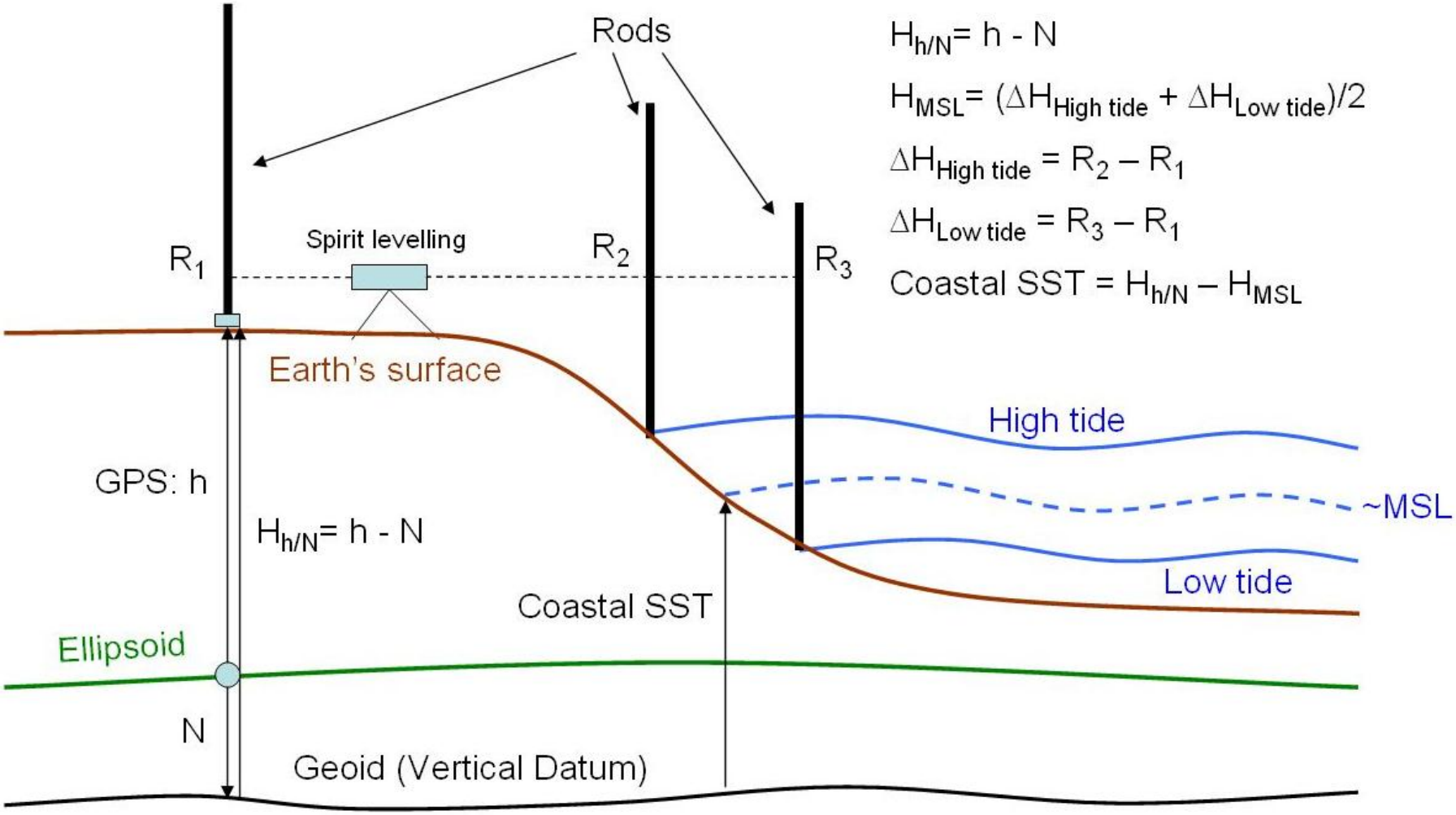
$$W(h = N(\lambda,\varphi),\lambda,\varphi) = U(h = 0,\varphi) = U_0$$ jeoid ve elipsoid

$$W(h,\lambda,\varphi) = U(h-\zeta,\varphi)$$ topografya ve telluroid

$$\left|\nabla W(h_T,\lambda,\varphi)\right| - \left|\nabla U(h_T-\zeta,\varphi)\right| = \Delta g(h_T,\lambda,\varphi)$$ Molodensky vd. 1962

Franz Barthelmas (2009). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models. Scientific Technical Report STR09/02. Deutsches Geoforschunszentrum, Potsdam.

Jeoid ve ortalama deniz seviyesi (MSL) ilişkisi



-1.8 m < mean SST (ODT) < + 1.2 m
(global ölcekte) (LeGrand et al. 2003)

http://www.geod.nrcan.gc.ca/hm/msl_e.php

Gravity for the Re-definition of American Vertical Datum-GRAV-D

NGVD 1929; NAVD 1988

Amaç: Düşey datum sağlamak amaçlı gravite ölçülerine dayanan ülke ölçeğinde 2 cm doğruluğunda hibrid yerel (gravimetrik) jeoid modeli oluşturmak.
Proje süresi : 10 yıl. 2021 yılında tamamlanması planlanıyor.

National Geodetic Survey (NGS-USA) GRAV-D projesi (Gravity for the Re-definition of American Vertical Datum-GRAV-D)

- Uçaktan gravite ölçülerinin gerçekleştirilmesi (en iyi dogrulugu ~2 mgal)
- Yersel gravite ölçülerinin gerçekleştirilmesi
- Uydu altimetre ölçülerinden gravite anomalileri (dalga boyu: ~20 km ve gravite anomalisi belirleme duyarligi ~5 mgal) ve ortalama deniz yüzeyi modelleri
- Ulusal düşey kontrol ağı mareograf istasyonlarından belirlenen ortalama deniz seviyesi

Ulusal gravimetrik jeoid modeli

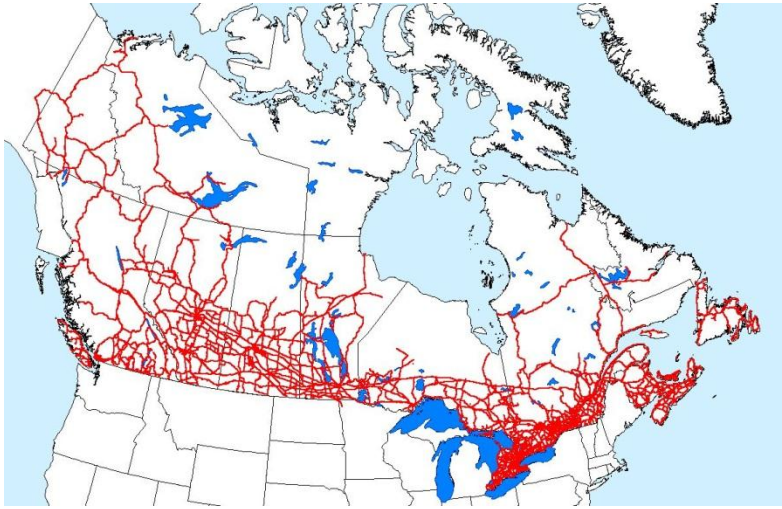
- Jeoid yüzeyinin yüksekliklerini, referans veya global elipsoid yüzeylerinden hesaplayan modeller
- Gravimetrik jeoid modelleri
- Hibrid jeoid modelleri
- Gravimetrik çekül sapması modelleri
- Hibrid çekül sapması modelleri

http://www.ngs.noaa.gov/GRAV-D/

Hasan Yıldız (2012) Yükseklik Modernizasyonu Yaklasimi: Türkiye icin bir inceleme. Harita dergisi. 147, 1-12.

Kanada nivelman ağı ve Kanada düşey datumu 1928 (CGVD28) modernizasyonu

NRCan/GSD
Nivelman-tabanlı düşey datumdan Jeoid-tabanlı düşey datuma geçiş.



Avantajlar

- Mutlak (global) duyarlıkta iyileşme.
- GNSS, global uydu misyonlari ile tam uyum.
- Sürdürülebilirlik maliyeti az.
- Daglık arazilerde ortometrik yükseklikler elde edilmesi.
- Sadece nivelman noktalarında değil tüm yüzey noktalarında ortometrik yükseklikler hızlı ve az maliyetle belirlenebilmesi.
- Nivelman noktalarından çıkış almaya gerek kalmaması.
- Gelecek Uluslararası yükseklik standardlarIna uyum.
- Yeni geliştirilen global jeoid modelleri ve uydu gravite misyonları.
- Digital arazi/yükseklik modellerinin sürekli iyileştirilmesi (ETOPO2, SRTM vd.).

Dez-avantajlar

- GNSS teknolojilerine bağımlılık.
- Bağıl (ülke içi) düşey konum doğruluğunun nisbeten düşük olması.
- Jeoid modellerinde girdi verilerin duyarlıkları (örnegin: Stokes integralinden önce gravite anomalilerine getirilen topografya indirgemesi)

Veronneau and Heroux (2007) Canadian Height Modernization: Rational, Status and Plans. Canadian Geodetic Reference System Committe. GeoCongres, Quebec, Canada, 2-5 October 2007.

Avusturalya, Danimarka, Kanada, Finlandiya, Norveç, Isveç nivelman ağı ve düşey datumu

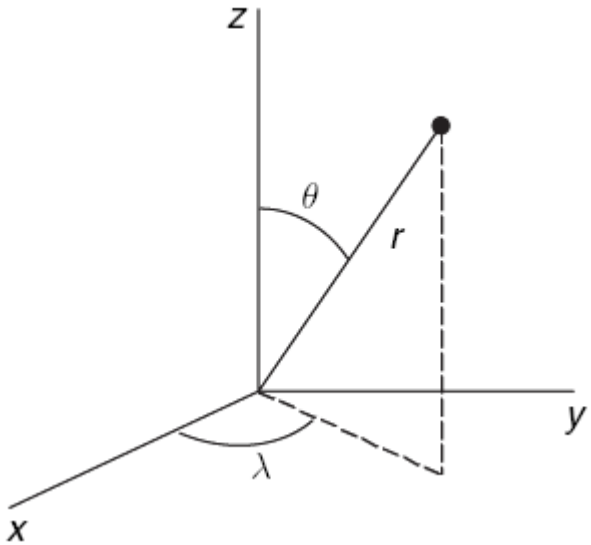
- Avusturalya 1966-1968 yılları arasında 30 mareograf istasyonundan belirlediği ortalama deniz seviyesini düşey datum olarak kullanmaktadır (Australian height datum (AHD), 1971). Avusturalyanın düşey datumunda ve nivelman ağında problemler var.
- Danimarka 1888-1900 yılları arasında 10 mareograf istasyonundan belirlediği ortalama deniz seviyesini düşey datum olarak kullanmakta.
- Kuzey ülkeleri post-glacial rebound ve Avusturalya haricindeki tüm ülkeler tektonik hareket problemleri ile karşılaşmış.
- Danimarka, Finlandiya ve Isveç nivelman noktalarındaki yükselme hızlarını belirlemişler fakat bilimsel çalışmalar haricinde uygulacılarca pek dikkate alınmamış.
- Mareograf istasyonlarında deniz topografyasının (SST) izlenmesi ihmal edilmiş.
- Hepsinde ortalama deniz seviyesi (MSL) sıfır jeopotansiyel yüzey olarak düşünülmüş.
- Nivelman noktalarının bir kısmı tahrip olmuş.
- Uygulayıcılardan yükseklik datumunun yenilenmesine ilişkin bir talep gelmemiş.
- Tayvan, Kuoshio okyanus akıntısının neden olduğu büyük deniz topografyası (SST) değişimlerine rağmen tek mareograf istasyonundan elde ettiği ortalama deniz seviyesini (MSL) sıfır jeopotansiyel yüzey kabul etmis.

http://www.geod.nrcan.gc.ca/hm/docs_e.php: Height Reference System Modernization Documents

Teşekkür ederim

Ekler

Küresel kutupsal ve elipsoidal koordinat sistemleri



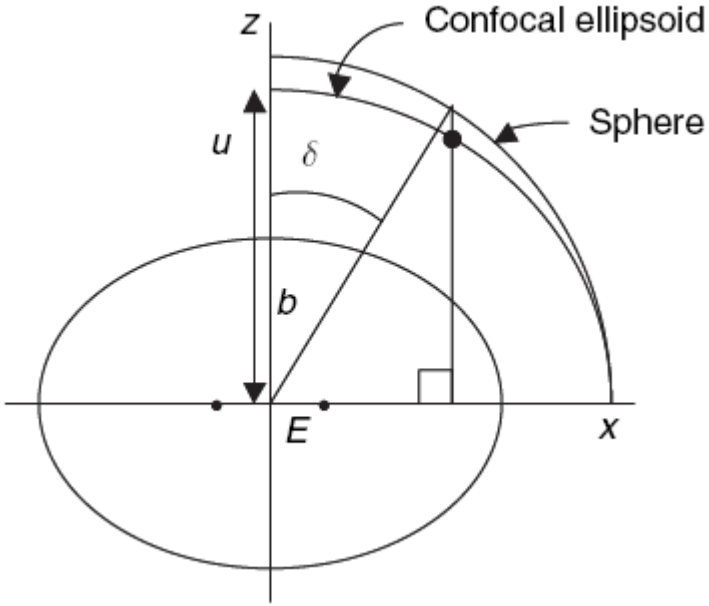
<u>Yer'in gravite jeopotansiyelinin modellenmesinde</u>

$$x = r\sin\theta\cos\lambda$$

$$y = r\sin\theta\sin\lambda$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\theta = 90° - \varphi \quad ; \varphi : coğrafi\ enlem$$



<u>Normal elipsoidin gravite potansiyelinin modellenmesinde</u>

$$x = \sqrt{u^2 + E^2}\sin\delta\cos\lambda$$

$$y = \sqrt{u^2 + E^2}\sin\delta\sin\lambda$$

$$z = u\cos\delta$$

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}\ (lineer\ eksentrisite)$$

u : *noktadan gecen normal elipsoidin küçük yarı ekseni*

$$\delta = 90° - \beta \quad ; \beta = \tan^{-1}(\frac{b}{a}\tan\varphi)\,(indiregnemiş\ enlem)$$

Gravitenin algılanması

- Yunan filozof **Aristotle** (384-322 BC): Gravitasyon doğal bir olgudur. Maddelerin düşmesine ve yükselmesine (gazlar için) neden olur. Ağır maddeler hızlı düşer(!)

Rönesans dönemi sonrası (15 yüzyil sonrası Avrupası)

- Aristotle'den 2000 yıl sonra **Galileo Galilei** (1564-1642): Gözlem ve ölçülerin bilimsel analizi ile tüm maddelerin aynı ivemelenme ile yere düştüklerini buldu (fizikçiler icin devasa bir gelişmedir).
- **Johannes Kepler** (1571-1630): Gezegenlerin yörünge hareketlerini modelleyerek yörüngeler kanunu, alanlar kanunu ve periyotlar kanunu yani gezegensel hareket yasalarını buldu.
- **Issac Newton** (1642-1727): Tek bir yasa (gravitasyon yasası) bularak tüm evrenin dinamiğini açıklamayı başardı (Philosophiae Naturalis principia mathematica, 1687).

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{l^2}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{g} = G\frac{m}{l^2}\vec{n} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Gm}{l}$$

- **Pierre Bouguer** 1735-1743 yılları arasında Peru'da ilk gravite (mutlak gravite) ölçüsünü pendulum aleti ile yaptı.
- **Lagrangre** (1736-1813), **Gauss** (1777-1855) ve **Green** (1793-1841): Gravitasyonel ivmelenme ve gravite potansiyeli alanlarını geliştirdi.
- **Albert Einstein** (1879-1955): Genel relativistik teorisi ile gravite alanlarının bir hıza sahip oldugunu ve bu hızında evrenin eşik hızı olan ışık hızına eşit olduğunu buldu. Işıgın uzayda gravite egrileri boyunca yol aldığını buldu.
- **Friedrich Robert Helmert** (1843-1917): EKK (**Carl Friedrich Gauss**, jeodezide EKK), koordinat dönüsümleri ve bir cok jeodezik problemlere iliskin model geliştirdi.
- **Stokes**, 1849; **Pizetti**, 1911; **Venning Meinesz**, 1928; **Kellog,** 1953; **Modelensky**, 1962; **Heiskanen ve Moritz**, 1967; **Günter**, 1967; **Hotine**, 1969; **Pick** vd., 1973; **Vanicek** ve **Krakiwsky**, 1982; **Moritz**, 1989; **Jekeli**, 1988; **Hofmann Wellenhof ve Moritz**, 2005; ...

Gravite potansiyeli

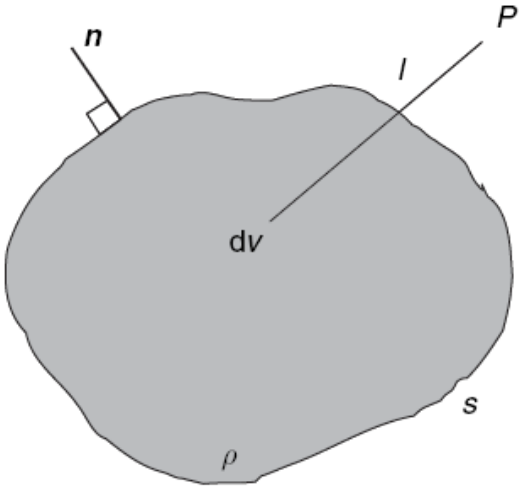
$$V = \frac{GM}{l}$$ (Nokta kitle potansiyeli)

Sürekli yoğunluk dağılımına sahip kitle potansiyeli

$$V(x,y,z) = G\iiint \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2(z-z')^2}}dx'dy'dz'$$

$$\mathrm{W=V+Z=G}\iiint \frac{\rho}{l}dv + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$ (Yer'in gravite potansiyeli)

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r} \quad (r \geq R)$$ (Sabit yoğunluk dağılımına sahip küre potansiyeli)



Dirichlet (birinci) sınır değer problemi

Verilen: s küre yüzeyinde, $V_s(R,\theta',\lambda') \Rightarrow$ kaynak

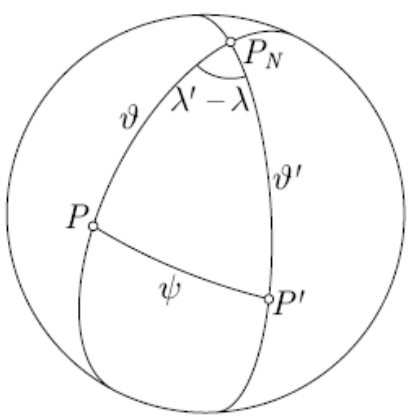
Aranan: s küre yüzeyi dışında, $V(r,\theta,\lambda) \Rightarrow$ hedef

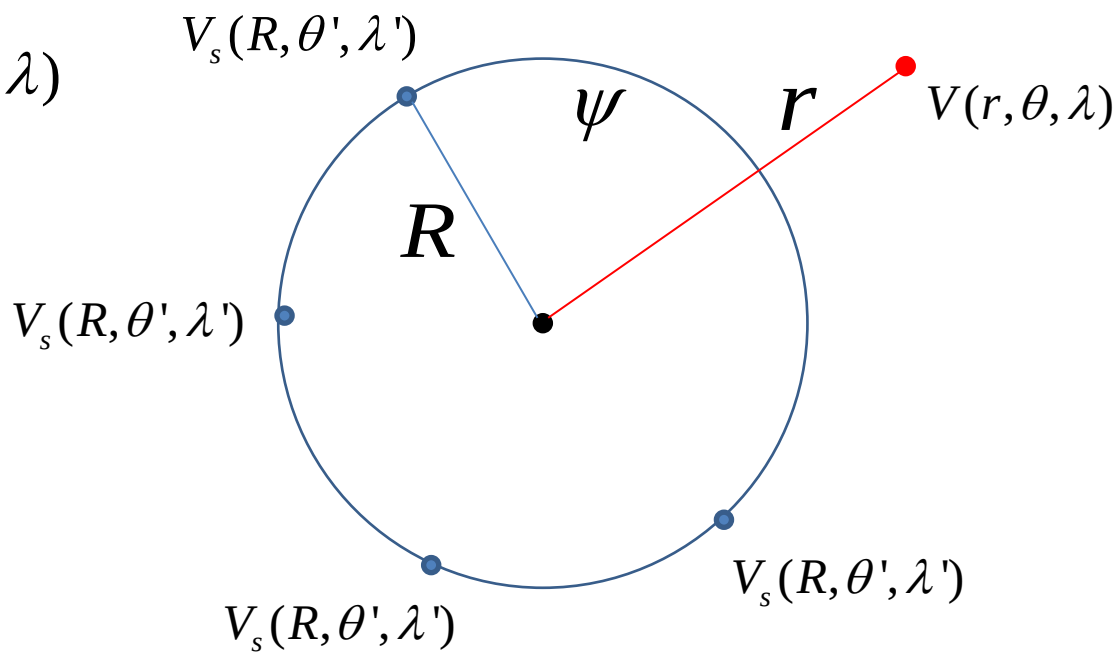
$$\psi = \cos^{-1}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda'-\lambda)]$$

Kaynak ile hedef arasındaki küresel uzaklık

$$\overline{Y}_n(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\theta'=0}^{\pi} V_s(R,\theta',\lambda')\overline{P}_n(\cos\psi)\sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\overline{Y}_n(\theta,\lambda)$$





Neumann (ikinci) sınır değer problemi

Verilen: s küre yüzeyinde, $\dfrac{\partial V_s}{\partial n}$ (n yüzey normali doğrultusu) $\Rightarrow$ kaynak

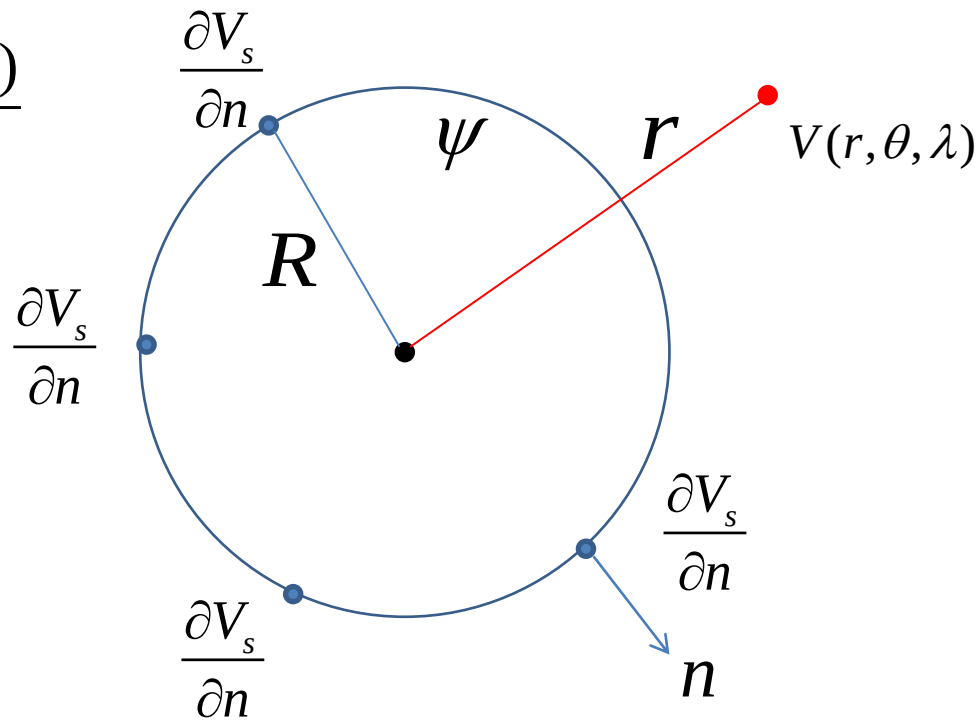
Aranan: s küre yüzeyi dışında, $V(r,\theta,\lambda) \Rightarrow$ hedef

$$\psi = \cos^{-1}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda)]$$

Kaynak ile hedef arasindaki küresel uzaklik

$$\overline{Y}_n(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\theta'=0}^{\pi}\frac{\partial V_s}{\partial n}\overline{P}_n(\cos\psi)\sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

$$V(r,\theta,\lambda) = -R\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{\overline{Y}_n(\theta,\lambda)}{n+1}$$



Robin (üçüncü) sınır değer problemi

Verilen: s küre yüzeyinde, $hV_s + k\dfrac{\partial V_s}{\partial n}$ (n yüzey normali doğrultusu) $\Rightarrow$ kaynak

Aranan: s küre yüzeyi dışında, $V(r,\theta,\lambda) \Rightarrow$ hedef

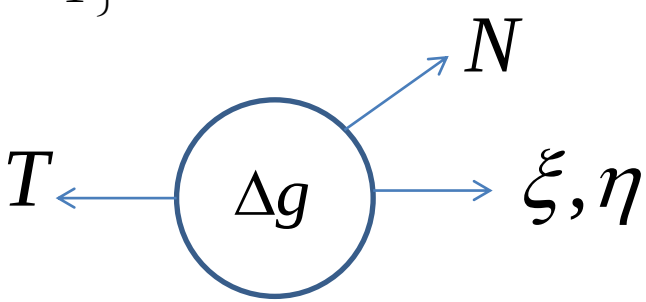
$$\psi = \cos^{-1}[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda)]$$

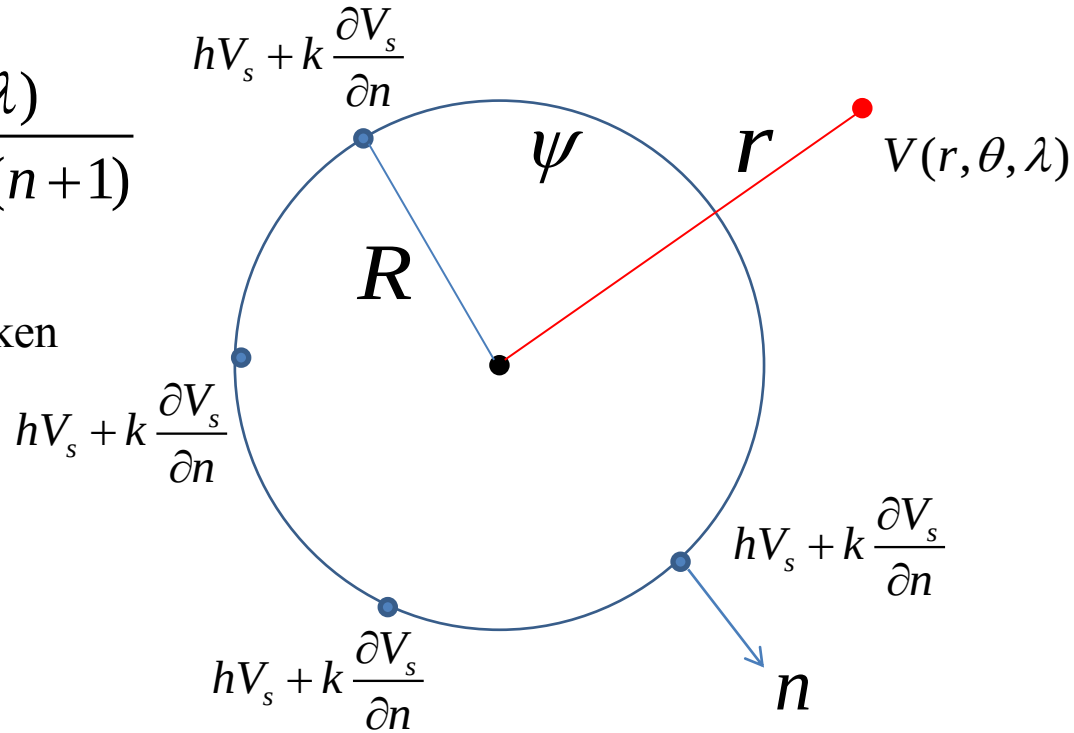
Kaynak ile hedef arasındaki küresel uzaklık

$$\overline{Y}_n(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\theta'=0}^{\pi}\left(hV_s + k\frac{\partial V_s}{\partial n}\right)\overline{P}_n(\cos\psi)\sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

$$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{\overline{Y}_n(\theta,\lambda)}{h-(k/R)(n+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{2}{R} \\ k &= -1 \end{aligned}\right\}\text{Jeoid ondülasyonları hesaplanırken}$$





Poincare ve Prey gravite indirgemesi

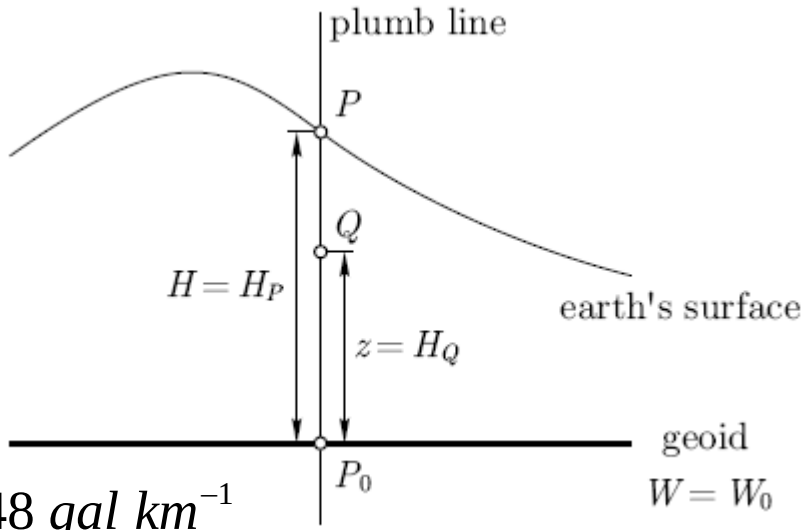
$$g_Q = g_P - \int_Q^P \frac{\partial g}{\partial H} dH$$

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G\rho = -0.3086 + 0.2238 = -0.0848\ gal\ km^{-1}$$

$$g_Q = g_P + 0.0848(H_P - H_Q)$$



- $W=W_Q$ üzerindeki tüm kitleleri kaldır. P noktasında ölçülen g'den çıkar.
- P noktasından Q noktasına g' ye serbest hava indirgemesi yap.
- Kaldırdığın kitleleri yerine koy.

g_P P noktasında ölçülen gravite

1- Bouguer plakasını kaldır..... $-0.1119(H_P - H_Q)$

2- P den Q ya serbest hava indirgemesi yap..... $+0.3086\ (H_P - H_Q)$

3- Bouguer plakasını ekle..... $-0.1119(H_P - H_Q)$

Q daki gravite ..... $g_Q = g_P + 0.0848$ gal km^{-1} x $(H_P - H_Q)$ km

Bernhard Hofmann-Wellenhof ve Helmut Moritz (2006) Physical Geodesy, Second Edition, Springer, Wien, NewYork, ISBN-10 3-211-33544-7.

Normal elipsoidin dış gravite potansiyel alanı

Normal elipsoid parametreleri: $a,\ f, GM, \omega$

u : noktadan geçen normal elipsoidin küçük yarı ekseni

β : noktanın indirgenmiş enlemi

$$U(u,\beta) = V(u,\beta) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

$$U(u,\beta) = \frac{GM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \frac{q}{q_0}(\sin^2\beta - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+E^2)\cos^2\beta$$

$$q = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{u^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{u} - 3\frac{u}{E}\right]$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{b^2}{E^2}\right)\tan^{-1}\frac{E}{b} - 3\frac{b}{E}\right]$$

Herhangi bir enlem ve yükseklikteki noktanın normal gravitesi

$$(a,\ f,\ GM,\ \omega)$$

$$\gamma = \frac{a\gamma_p \sin^2\beta + b\gamma_e \cos^2\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}}$$

indirgenmiş enlemden (β) normal gravite hesabı

$\gamma_e : \beta = 0° :$ ekvatordaki normal gravite

$\gamma_p : \beta = \pm 90° :$ kutuplardaki normal gravite

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2\varphi + b\gamma_p \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

cografi enlemden (φ) normal gravite hesabı

$$\gamma_h = \gamma\left[1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f\sin^2\varphi)h + \frac{3}{a^2}h^2\right]$$

$$f = \frac{a-b}{a}$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

$h :$ noktanın sferoid yüzeyinden yüksekliği

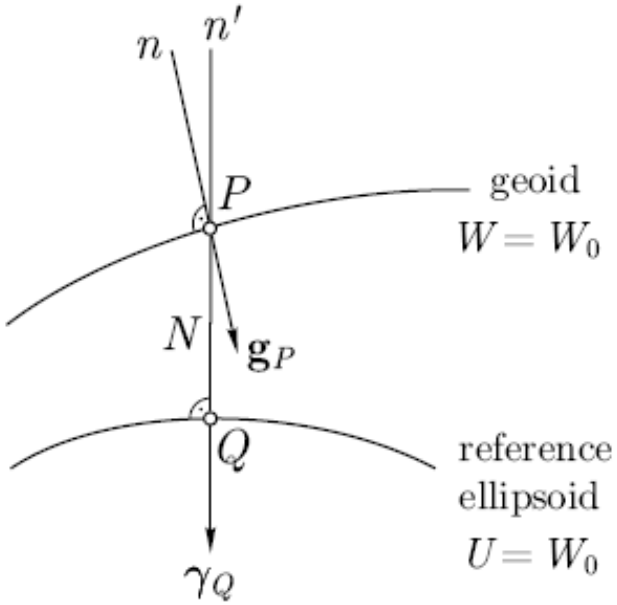
Bozucu gravite, gravite anomalisi

$$\left|\nabla W(h,\lambda,\varphi)\right| - \left|\nabla U(h,\varphi)\right| = \delta g(h,\lambda,\varphi)$$

$$\left|\nabla W(h=N,\lambda,\varphi)\right| - \left|\nabla U(h=0,\varphi)\right| = \Delta g(h=N,\lambda,\varphi)$$

Molodensky vd. 1962

$$\left|\nabla W(h_T,\lambda,\varphi)\right| - \left|\nabla U(h_T-\zeta,\varphi)\right| = \Delta g(h_T,\lambda,\varphi)$$



Yer'in gravite alanı küresel harmoniklerinin bazı özellikleri

$(n_{\max}+1)^2$: harmonik katsayıların sayısı

$(R/r)^n$: potansiyel ondulasyonlarının genliklerinin küçülme (downward continuation) ve büyüme (altitude) ölçeği

$C_{10}^V, C_{11}^V, S_{11}^V$: Jeoid ve normal elipsoid orjinleri arasındaki kayıklıklar

C_{21}^V, S_{21}^V : Jeoidin ortalama dönme kutbunun koordinatları (inersiyal tensör)

Gravite alanının en küçük temsil edilebilirlik çözünürlüğü

en kısa yarım dalga boyu $\Rightarrow a_{\min}(n_{\max}) \approx \dfrac{\pi R}{n_{\max}}$ (1) veya $a_{\min}(n_{\max}) = 4\arcsin\left(\dfrac{1}{n_{\max}+1}\right)$ (2)

maksimum derece	Stokes katsayısı sayısı	çözünürlük			
		eşitlik (1)		eşitlik (2)	
n_{max}	C_{nm}, S_{nm}	[derece]	[km]	[derece]	[km]
75	5776	2.4	266.667	3.016	335.073
180	32761	1.0	111.111	1.266	140.690
360	130321	0.5	55.556	0.635	70.540

Astrojeodezik çekül sapması bileşenleri (ʒ, η)

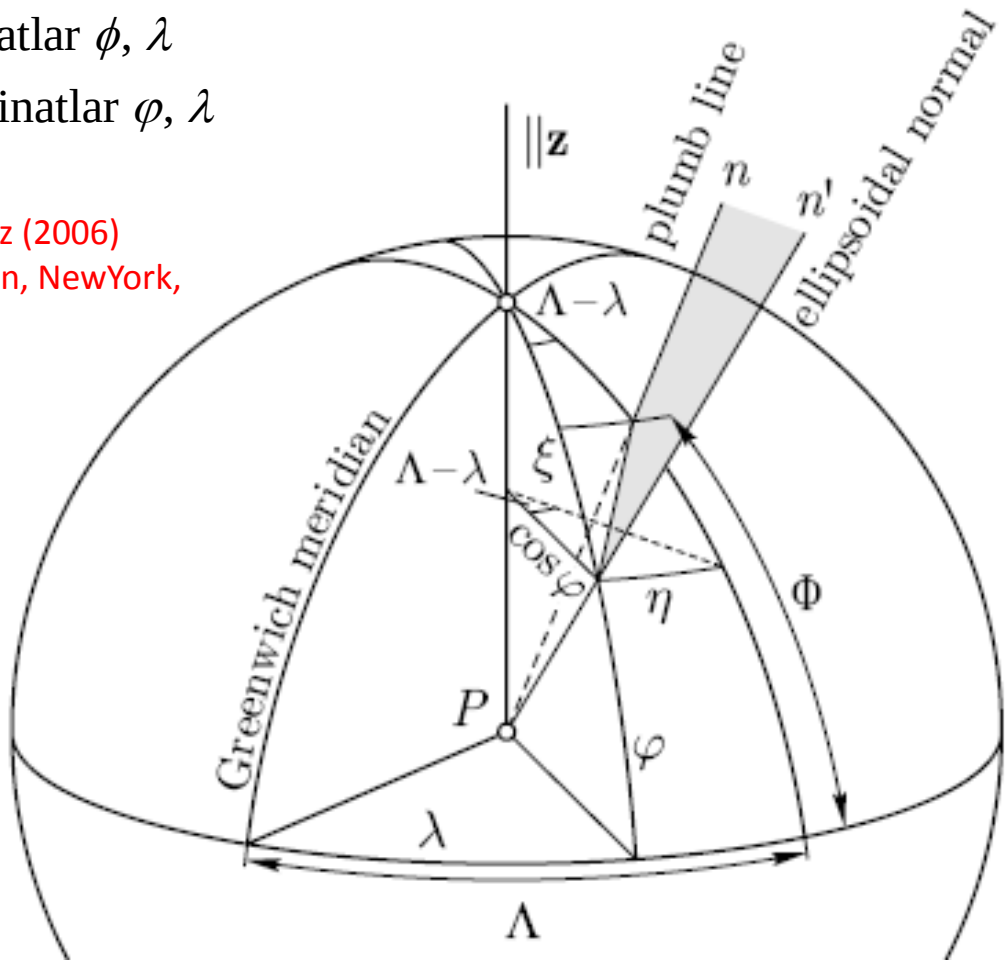
$$\xi = \phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi$$

jeoid normali n, astronomik koordinatlar ϕ, λ

elipsoid normali n', elipsoidal koordinatlar φ, λ

Bernhard Hofmann-Wellenhof ve Helmut Moritz (2006)
Physical Geodesy, Second Edition, Springer, Wien, NewYork,
ISBN-10 3-211-33544-7.



Çekül sapması bileşenlerinin (ʒ, η) küresel harmonik fonskiyona açılımı

$$\xi = \frac{1}{a}\frac{\partial N}{\partial \theta} \quad ; \quad \eta = -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial N}{\partial \lambda}$$

$$\xi(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{a\cdot r\cdot \gamma_0}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}^T \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^T \sin m\lambda\right)\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\partial\theta}$$

$$\eta(r,\theta,\lambda) = -\frac{GM}{a\cdot r\cdot \gamma_0 \sin\theta}\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(-m\bar{C}_{nm}^T \sin m\lambda + m\bar{S}_{nm}^T \cos m\lambda\right)\bar{P}_{nm}\left(\cos\theta\right)$$

$$2\frac{\partial \bar{P}_{n,m}(\cos\theta)}{\partial\theta} = \begin{cases} -\sqrt{2n(n+1)}\bar{P}_{n,1}(\cos\theta) & (m=0) \\ \sqrt{2n(n+1)}\bar{P}_{n,0}(\cos\theta) - \sqrt{(n-1)(n+2)}\bar{P}_{n,2}(\cos\theta) & (m=1) \\ \sqrt{(n+m)(n-m+1)}\bar{P}_{n,m-1}(\cos\theta) - \sqrt{(n-m)(n+m+1)}\bar{P}_{n,m+1}(\cos\theta) & (m>1) \end{cases}$$

GOCE Level 2 product data handbook. Issue: 4.3. Doc. Nr: GO-MA-HPF-GS-0110.

Permanent Tide and Tide Systems

4 Parts of Tidal Potential:

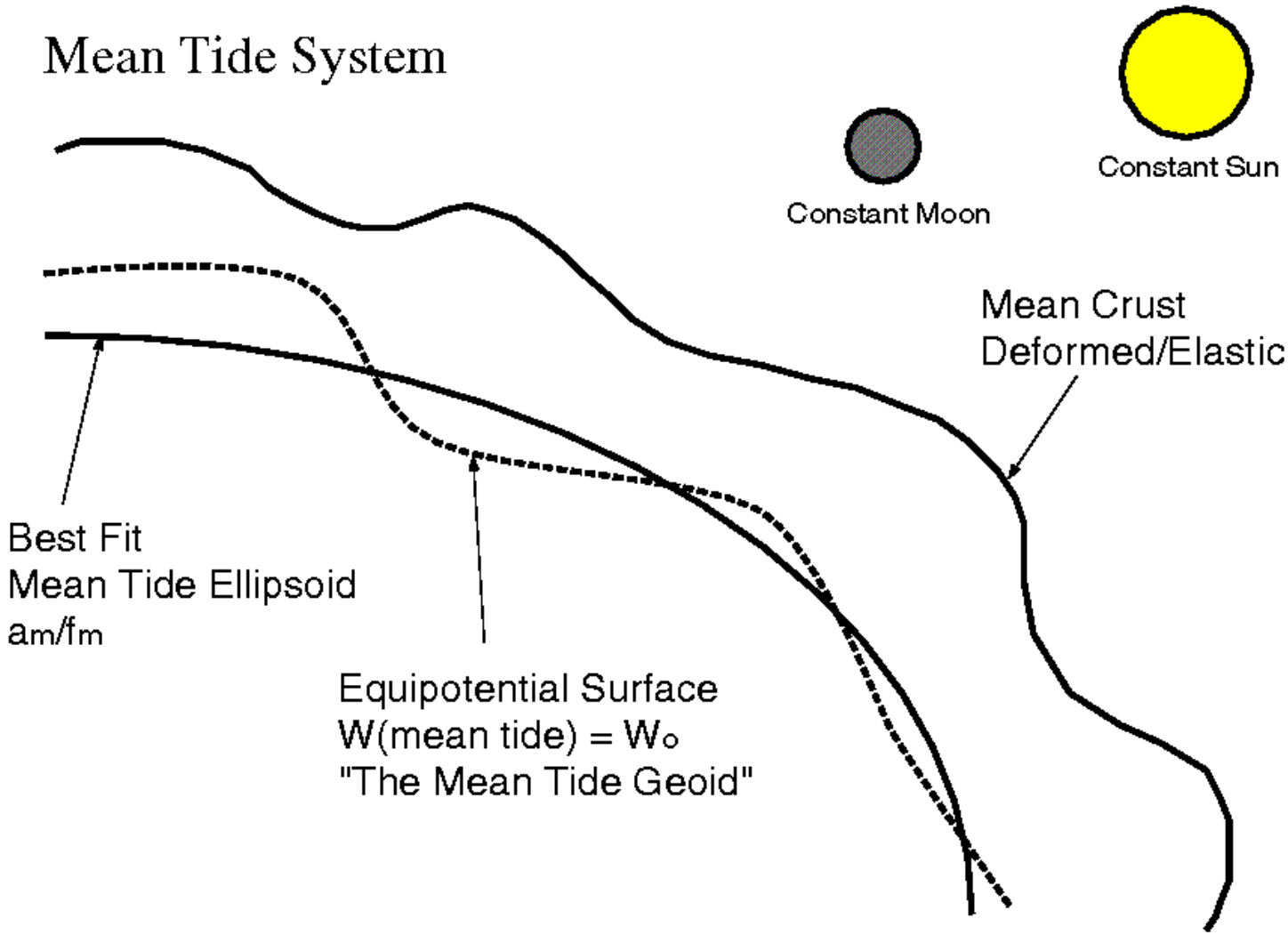
	Periodic	Permanent
Direct	✓	✓
Indirect	✓	✓

Direct: Due to Sun/Moon masses
Indirect: Due to the Deformation of the Earth's crust

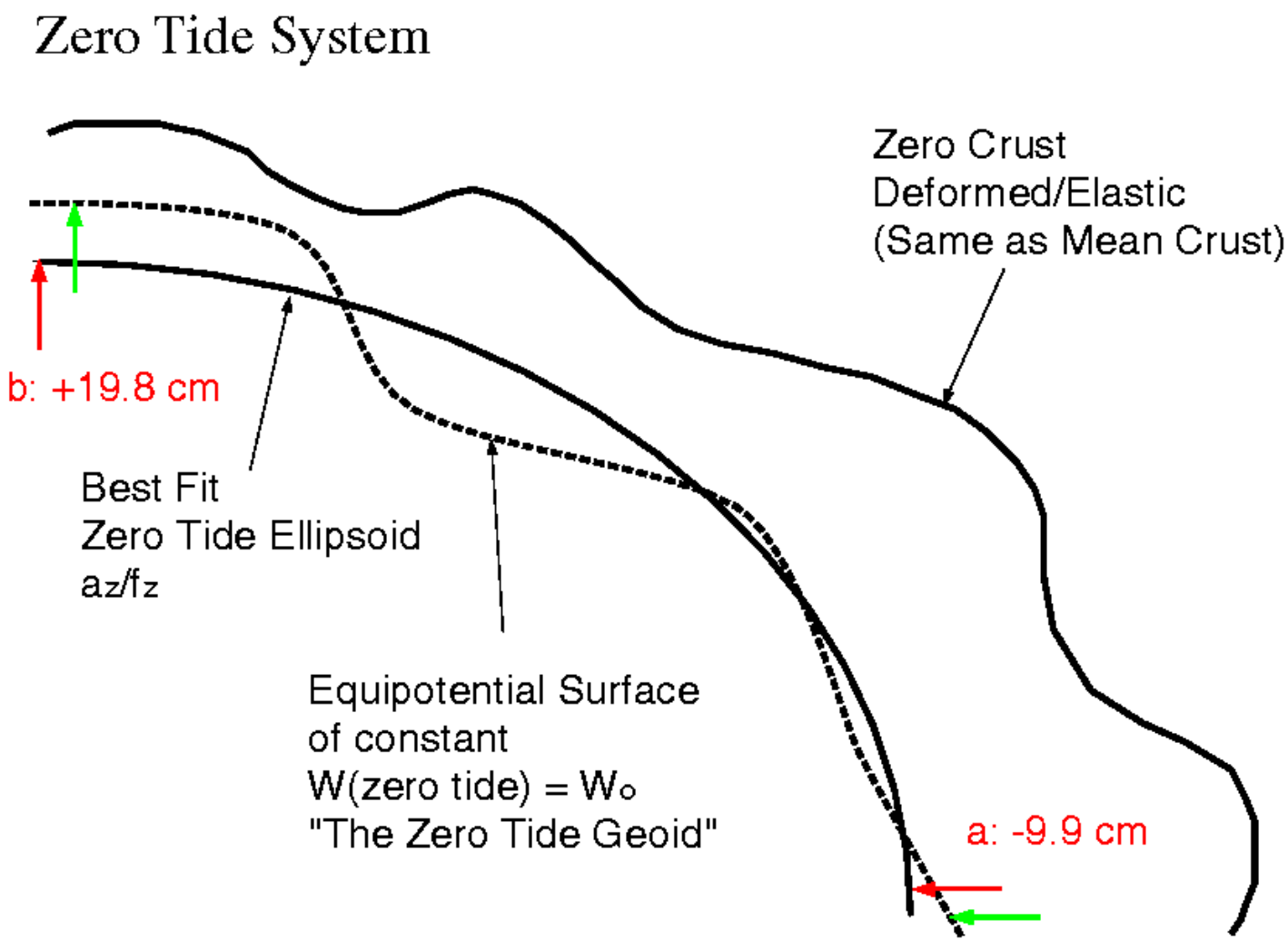
All Periodics are removed through averaging or modelling.

Removal of Permanent part leads to 3 different tide systems.

Gravity, Normal Gravity, GPS Heights, Levelled Heights, and Geoid Undulation are all affected by the treatment of the Permanent Tide.

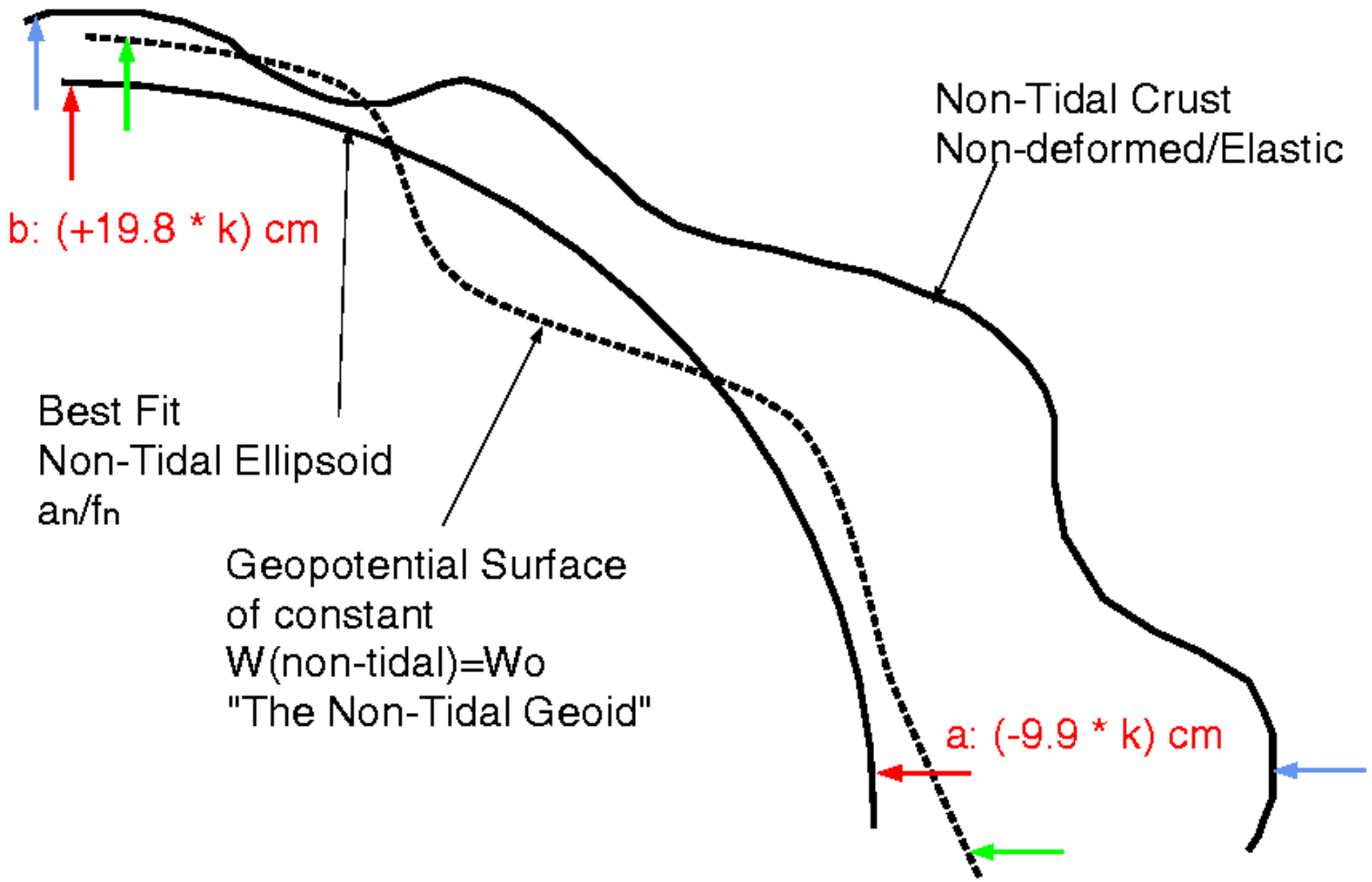


Dru A. Smith (1997) The impact of the permanent tide on GEOID96, G96SSS and NAVD88. Presented at the spring meeting of the American Geophysical Union, Baltimore, Maryland, 27 May 1997.



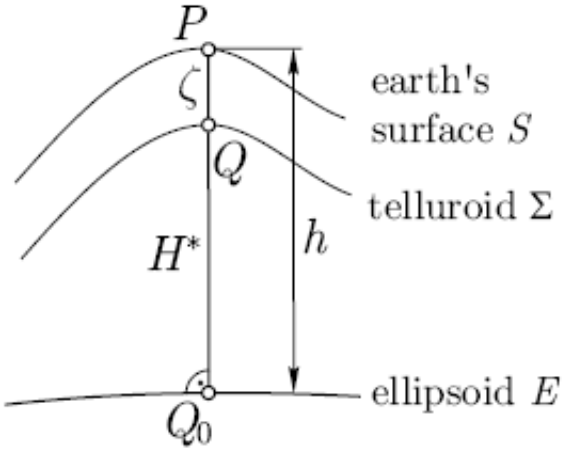
Dru A. Smith (1997) The impact of the permanent tide on GEOID96, G96SSS and NAVD88. Presented at the spring meeting of the American Geophysical Union, Baltimore, Maryland, 27 May 1997.

Non-Tidal (or Tide-Free) System



Dru A. Smith (1997) The impact of the permanent tide on GEOID96, G96SSS and NAVD88. Presented at the spring meeting of the American Geophysical Union, Baltimore, Maryland, 27 May 1997.

Yükseklik anomalisi ve Telluroid (Hirvonen, 1960, 1961)



Telluroid, normal height H^*, and height anomaly ζ

Her P topografya noktasındaki gerçek gravite potansiyeline (W_p) eşit olan normal gravite potansiyeline (U_Q) sahip bir Q noktası vardır. Q noktalarının oluşturduğu yüzeye Telluroid denir.

Ellipsoid height = normal height + height anomaly

$$h = H^N + \zeta$$

$$\zeta = h - H^N$$

$$W(h, \lambda, \varphi) = U(h - \zeta, \varphi)$$

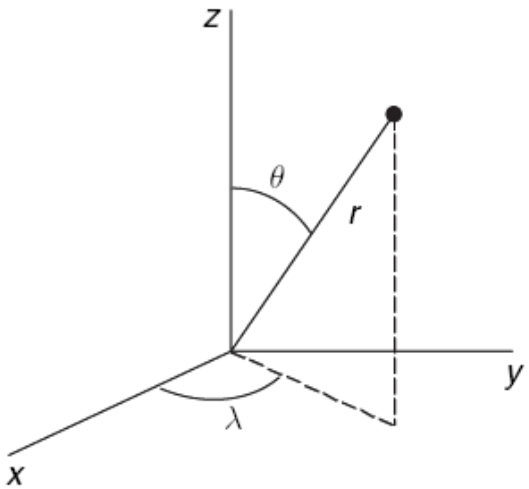
Yerin dış gravite potansiyel alanı (Küresel Harmonik Fonk.)

$$Y_n(\theta,\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\left[\overline{C}_{nm}\cos m\lambda+\overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right]\overline{P}_{nm}(\cos\theta)$$

yüzey küresel harmonik fonksiyon

$$V(r,\theta,\lambda)=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{n_{\max}}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}Y_n(\theta,\lambda)\right]$$

küresel harmonik fonksiyon : V = W - Z



V : Jeoid (sınır yüzey) dışında bir noktanın jeopotansiyeli

r : Yer'in merkezinden radyal uzaklık

(θ,λ) : Küresel kutupsal koordinatlar

θ : Hesap noktasının Yer merkezli ko-enlemi

G : Newton gravitasyon sabiti

M : Yer'in atmoferide kapsayan kitlesi

GM : örnegin: 3986004.415×10^{8} m^3s^{-2} (EGM2008)

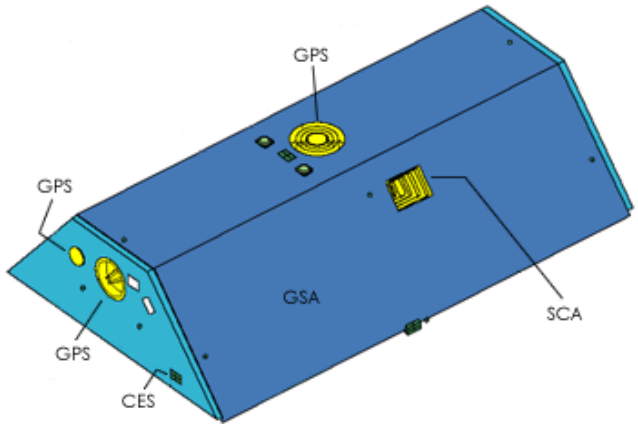
a : Yer elipsoidinin ekvatoral yarıçapı (örneğin:6378136.3 m: EGM2008)

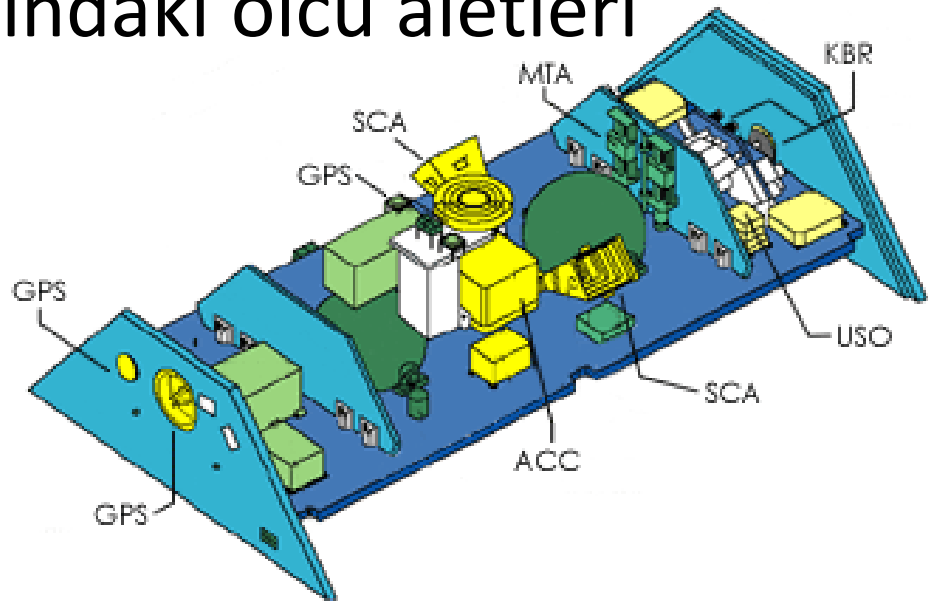
$\overline{P}_{nm}$: normalleştirilmiş Legendre Fonksionu

n, m : dalga numaraları (derece, mertebe)

Torge 2001; Hofmann-Wellenhof ve Moritz, 2005; Pavlis vd., 2008

GRACE uydularindaki ölcü aletleri





KBR (K-band ranging system): Iki uydu arasindaki mesafeyi 10^{-6} metre (sac kili genisligi) duyarlikta belirleyen uzunluk ölcme sistemi. Iyonosfer gecikmesinin modellenmesi icin iki farkli frekans (K-band : 24 ve Ka-band: 32 GHz) kullanir.

USO (Ultra Stable Oscillator): KBR uzunluk ölceri icin frekans duyarligi cok yüksek oscilatör (dalga üreteci).

ACC (SuperSTAR Accelorometers): Uyduya etkiyen gravitasyonel olmayan ivmelenmeleri duyarli olarak ölcer.

(SCA) Star Camera Assembly: Yildizlarin konumlarina göre iki uydunun birbirlerine olan dönüklüklerini ölcer.

(MTA) Center of Mass Trim Assembly: uydunun agirlik merkezi ile ivmelenme merkezi arasindaki ofsetleri ölcer.

(GPS) Black-Jack GPS Receiver and Instrument Processing Unit: Uydularin hassas konumlarini GPS uydularina olan mesafelerin ölcümü sonucu belirler.

GSA (Globalstar Silicon Solar Cell Arrays): Uydunun enerjisini saglayan ve dis kisimini saran paneller.

http://www.csr.utexas.edu/grace/