



10. TÜRKİYE HARİTA BİLİMSEL VE TEKNİK
KURULTAYI



JEODEZİK GPS AĞLARININ ÖLÇÜT MATRİSLERİ İLE
ÖLÇÜ PLANI OPTİMİZASYONU

Mualla YALÇINKAYA & Kamil TEKE

YÖNTEM

Tam izotrop yapıda Taylor-Karman ölçüt matrisi oluşturulması ↷

Ölçü planına ilişkin dizayn matrisi oluşturulması ve Ölçüt matrisinin inversine direkt yaklaşım (U,m) yöntemi ile bazların ağırlıklarının hesaplanması ↷

YÖNTEM

Ağırlıkları negatif sifira yakın olan bazların ölçü planından çıkarılmasıyla en uygun baz konfigürasyonunun belirlenmesi ve Optimum ağı oluşturan bazların ağırlıkları tekrar hesaplanarak optimal ağırlık dağılımına ulaşılması ↷

Ölçüt matrisinin oluşturulması

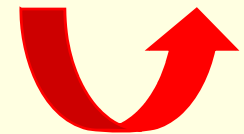
$$C_{xx} = \begin{bmatrix} \varphi_m(S) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_m(S) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_m(S) \end{bmatrix} + [\varphi_1(s) - \varphi_m(s)] \begin{bmatrix} \frac{\Delta X^2}{S^2} & \frac{\Delta X \Delta Y}{S^2} & \frac{\Delta X \Delta Z}{S^2} \\ \frac{\Delta X \Delta Y}{S^2} & \frac{\Delta Y^2}{S^2} & \frac{\Delta Y \Delta Z}{S^2} \\ \frac{\Delta X \Delta Z}{S^2} & \frac{\Delta Y \Delta Z}{S^2} & \frac{\Delta Z^2}{S^2} \end{bmatrix}$$

$\varphi_m(S) = \varphi_1(S) = \varphi(S)$ (Tam izotrop yapı)

$\varphi(S) = d^2 - 2c^2 S_{ij(km)}$ (Korelasyon fonksiyonu)

Tam izotrop yapıda Taylor-Karman ölçüt matrisi

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 & d^2 - 2c^2 S_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 & 0 & d^2 - 2c^2 S_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & d^2 - 2c^2 S_{ij} \\ d^2 - 2c^2 S_{ij} & 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 - 2c^2 S_{ij} & 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 - 2c^2 S_{ij} & 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix}$$



✚ U, m çözümü ile en uygun baz konfigürasyonu ve ölçü ağırlıklarının belirlenmesi

$$A^T P A \doteq \bar{Q}_{xx}^+ \quad (\text{İkinci derece optimizasyon temel eşitliği})$$

$$(A^T \odot A^T) p \doteq q$$

$$p = \text{vektör}(P)$$

$$q = \text{vektör}(\bar{Q}_{xx}^+)$$

Doğrusal denklem sistemine dönüşüm

$$(A^T \odot A^T) p = q + d$$

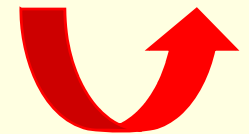
En Küçük Kareler Çözümü

$$d^T d = e^T \{ [(A^T P A) - \bar{Q}_{xx}^+] * [(A^T P A) - \bar{Q}_{xx}^+] \} e \Rightarrow \min$$

$$p = [(A^T \odot A^T)^T (A^T \odot A^T)]^+ (A^T \odot A^T)^T q$$

$$(A^T \odot A^T)^T (A^T \odot A^T) = (A A^T * A A^T)$$

$$p = (A A^T * A A^T)^+ (A^T \odot A^T)^T q \quad (\text{Ölçü Ağırlıkları})$$



✚ λ çarpanı ile doğrusal dönüşüm

$$\lambda = \frac{\text{iz}[(A^T P A)^+ (A^T P A)^+]}{\text{iz}[(A^T P A)^+ \bar{Q}_{xx}]}$$

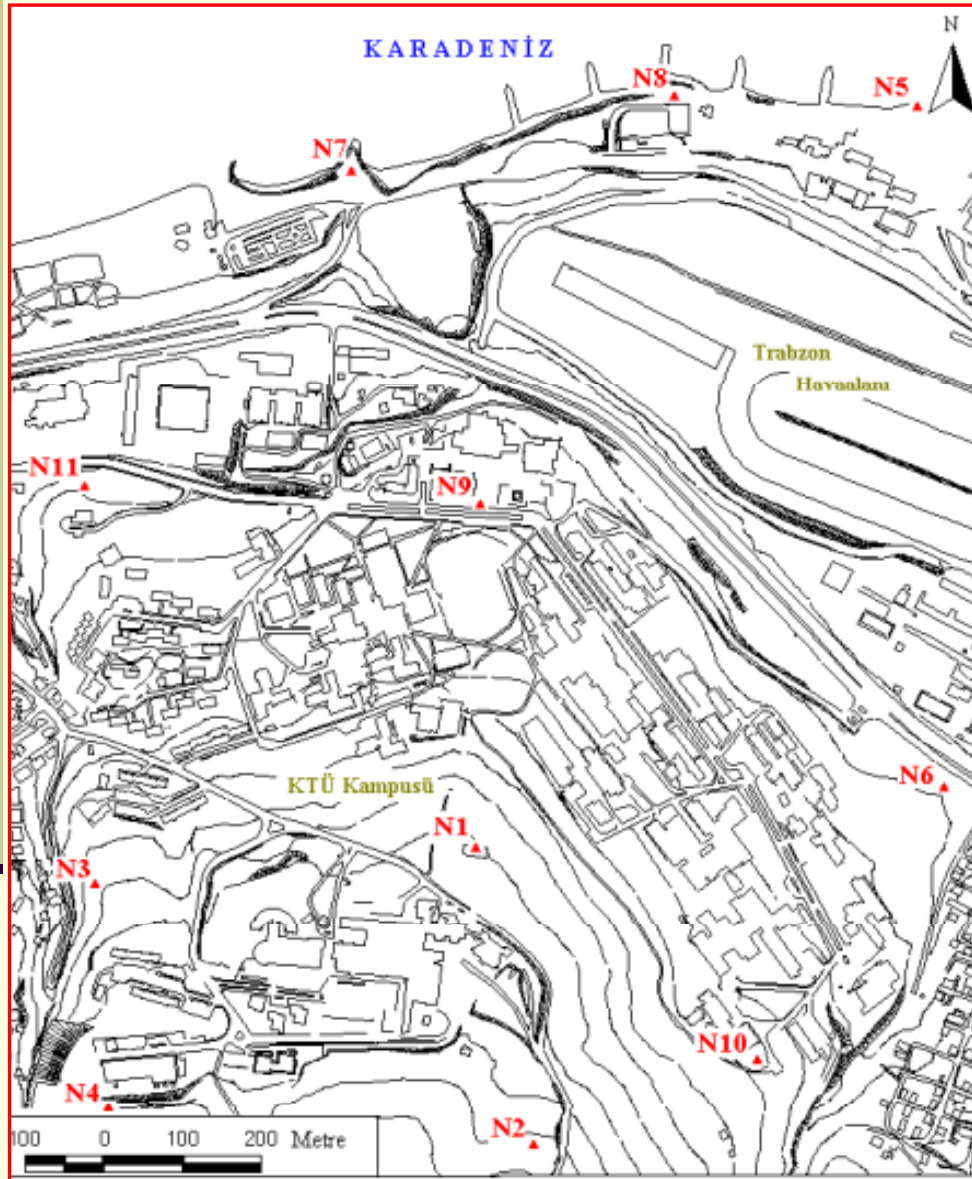
$$p_d = \lambda p \quad (\text{Ölçü ağırlıklarına uygulanan doğrusal dönüşüm})$$

Global ölçüt değeri

$$d^T d = e^T \{ [(A^T P_d A) - \bar{Q}_{xx}^+] * [(A^T P_d A) - \bar{Q}_{xx}^+] \} e$$

$$B = (A^T P_d A)^+ \bar{Q}_{xx}^+ \longrightarrow \lambda_{\max} \quad (\text{Eş değerlik testi değeri})$$

UYGULAMA



DUTM PROJEKSİYON KOORDİNATLARI

NN.	Sağa (m)	Yukarı (m)
N1	4540356.80	564887.70
N2	4539975.60	564959.00
N3	4540331.20	564400.70
N4	4539970.60	564450.70
N5	4541260.20	565500.60
N6	4540417.70	565480.90
N7	4541223.20	564736.20
N8	4541285.40	565126.30
N9	4540774.10	564895.30
N10	4540077.10	565244.50
N11	4540791.90	564387.90

1950 Avrupa Datumu (ED 50)

$(x, y) \rightarrow (B, L)$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad c = \frac{a^2}{b}$$

$$A' = c \left(1 - \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 - \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 \right)$$

$$B'' = \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{16}e^4 + \frac{213}{2048}e^6 - \frac{255}{4096}e^8$$

$$C'' = \frac{21}{256}e^4 - \frac{21}{256}e^6 + \frac{533}{8192}e^8$$

$$D'' = \frac{151}{6144}e^6 - \frac{453}{12288}e^8$$

$$\sigma = \frac{x}{A'}$$

$$B_f = \sigma + B'' \sin 2\sigma + C'' \sin 4\sigma + D'' \sin 6\sigma + \dots$$

$$t_f = \tan B_f, \quad \eta_f^2 = e^2 \cos^2 B_f, \quad V_f = \sqrt{1 + \eta_f^2}, \quad \rho_f = \frac{c}{V_f}$$

$$B_1 = \frac{1}{\rho_f \cos B_f}$$

$$B_2 = \frac{t_f (-1 - \eta_f^2)}{2 \rho_f^2}$$

$$B_3 = \frac{(-1 - 2t_f^2 - \eta_f^2)}{6 \rho_f^3 \cos B_f}$$

$$B_4 = \frac{t_f (5 + 3t_f^2 + 6\eta_f^2 - 6t_f^2 \eta_f^2)}{24 \rho_f^4}$$

$$B_5 = \frac{(5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8t_f^2 \eta_f^2)}{120 \rho_f^5 \cos B_f}$$

$$B = B_f + B_2 y^2 + B_4 y^4$$

$$L = L_0 + B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5$$

ED-50 COĞRAFI KOORDİNATLARI
(ELİPSOİD; HAYFORD)

NN.	B	L
N1	40° 59' 41'' .1315884	39° 46' 16'' .0747511
N2	40° 59' 28'' .7563162	39° 46' 18'' .9828795
N3	40° 59' 40'' .4409464	39° 45' 55'' .2332344
N4	40° 59' 28'' .7390282	39° 45' 57'' .2367824
N5	41° 00' 10'' .2363757	39° 46' 42'' .6375759
N6	40° 59' 42'' .9343265	39° 46' 41'' .4732267
N7	41° 00' 09'' .2565078	39° 46' 09'' .9187762
N8	41° 00' 11'' .1625093	39° 46' 26'' .6361467
N9	40° 59' 54'' .6568257	39° 46' 16'' .5599214
N10	40° 59' 31'' .9637263	39° 46' 31'' .2313205
N11	40° 59' 55'' .3766670	39° 45' 54'' .8597487

1950 Avrupa Datumu (ED-50) (B, L, h) → (X, Y, Z)

$$h = H + N$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

$$X_{ED50} = (\rho + h) \cos B \cos L$$

$$Y_{ED50} = (\rho + h) \cos B \sin L$$

$$Z_{ED50} = \left(\frac{b^2}{a^2} \rho + h \right) \sin B$$

ED-50 KARTEZYEN KOORDİNATLARI

NN.	X (m)	Y (m)	Z (m)
N1	3705670.724	3084286.627	4162138.116
N2	3705835.113	3084511.895	4161867.362
N3	3705978.805	3083909.231	4162105.880
N4	3706164.777	3084124.916	4161871.732
N5	3704751.660	3084329.371	4162737.550
N6	3705217.745	3084681.990	4162129.055
N7	3705253.737	3083752.377	4162712.053
N8	3704976.235	3084029.732	4162758.794
N9	3705417.928	3084090.975	4162413.276
N10	3705563.291	3084658.154	4161898.213
N11	3705722.310	3083684.434	4162420.014

ED 50 \longrightarrow WGS 84

(X, Y, Z) \longrightarrow (X, Y, Z)

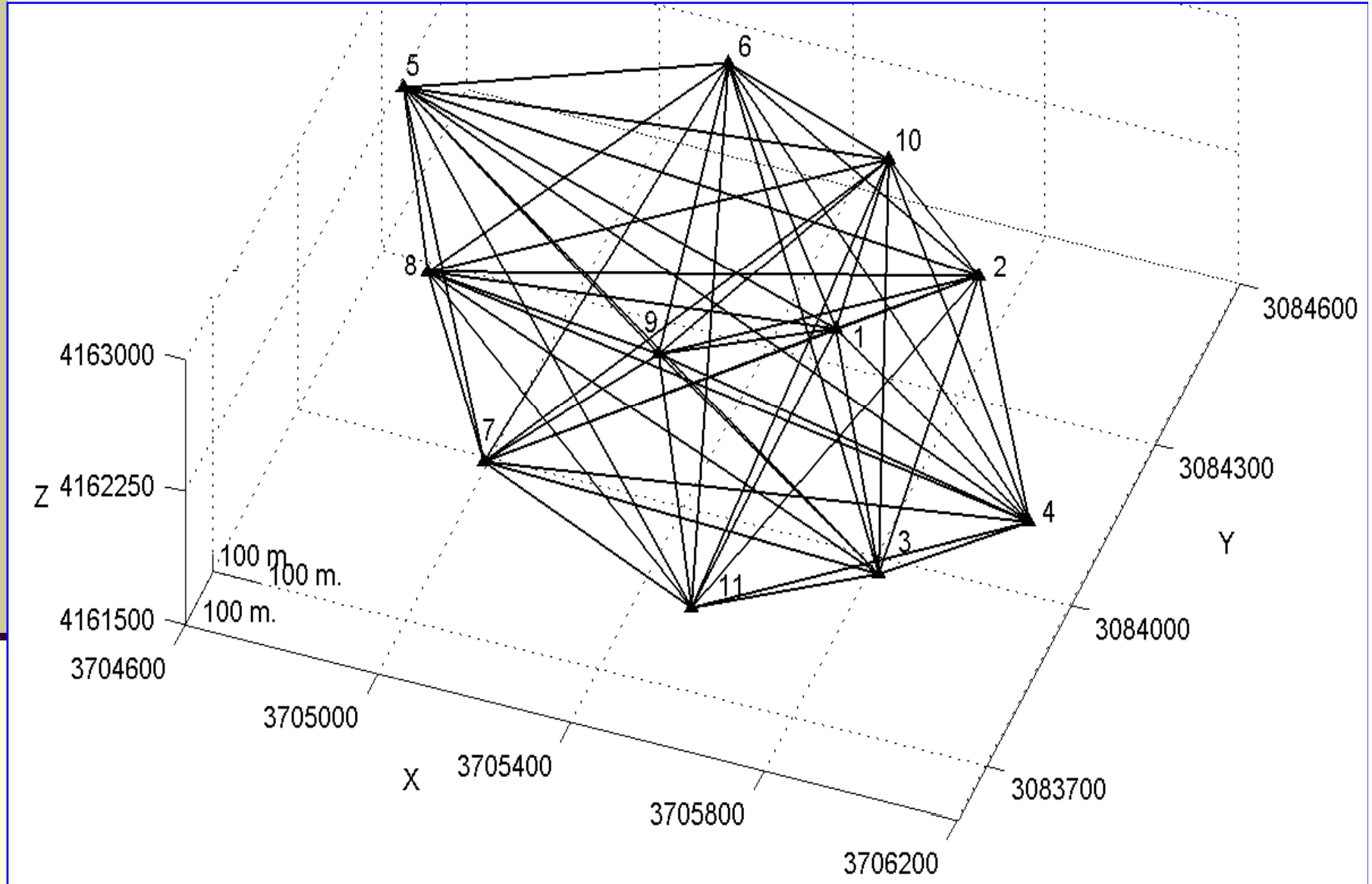
ϵ_x	814.5811 m.
ϵ_y	-493.8607 m.
ϵ_z	-484.2067 m.
t_x	6".3763
t_y	28".6308
t_z	-17".9857
k	1.000012301

WGS-84 KOORDİNATLARI

NN	X (m)	Y (m)	Z (m)
N1	3705593.062	3084206.610	4162021.731
N2	3705757.467	3084431.882	4161750.996
N3	3705901.177	3083829.246	4161989.550
N4	3706087.160	3084044.936	4161755.424
N5	3704673.922	3084249.292	4162621.029
N6	3705140.056	3084601.929	4162012.596
N7	3705176.047	3083672.348	4162595.620
N8	3704898.518	3083949.677	4162642.313
N9	3705340.249	3084010.947	4162296.859
N10	3705485.632	3084578.116	4161781.804
N11	3705644.661	3083604.438	4162303.652

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{WGS84}} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ED50}}$$

Maksimum Ölçü Planı



Ölçüt matrisinin özdeğerleri ve hata elipsoidi yarı eksenleri

NN	\bar{Q}_{xx} Matrisinin Özdeğerleri			\bar{Q}_{xx} Matrisi Hata Elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)		
	λ_X	λ_Y	λ_Z	A_H (cm)	B_H (cm)	C_H (cm)
N1	0.728	0.728	0.728	0.85	0.85	0.85
N2	0.968	0.968	0.968	0.98	0.98	0.98
N3	0.985	0.985	0.985	0.99	0.99	0.99
N4	1.310	1.310	1.310	1.14	1.14	1.14
N5	1.645	1.645	1.645	1.28	1.28	1.28
N6	1.140	1.140	1.140	1.07	1.07	1.07
N7	1.131	1.131	1.131	1.06	1.06	1.06
N8	1.226	1.226	1.226	1.11	1.11	1.11
N9	0.755	0.755	0.755	0.87	0.87	0.87
N10	1.035	1.035	1.035	1.02	1.02	1.02
N11	1.069	1.069	1.069	1.03	1.03	1.03

Optimizasyon Sonuçları

	Birinci Adım	İkinci Adım	Üçüncü Adım	Dördüncü Adım
Optimizasyona Giren Ölçü Sayısı	55*3 = 165	24*3=72	22*3=66	18*3=54
Ölçü Planından Çıkarılan Ölçü Sayısı	31*3 = 93	2*3=6	4*3=12	1*3=3
Kalan Ölçü Sayısı	24*3 = 72	22*3=66	18*3=54	17*3=51
Global Ölçüt Değeri ($d^T d$)	1.11	1.14	1.19	6.74
Eş Değerlik Testi Değeri	$\lambda_{\max}=1.05$	$\lambda_{\max}=1.05$	$\lambda_{\max}=1.07$	$\lambda_{\max}=1.75$

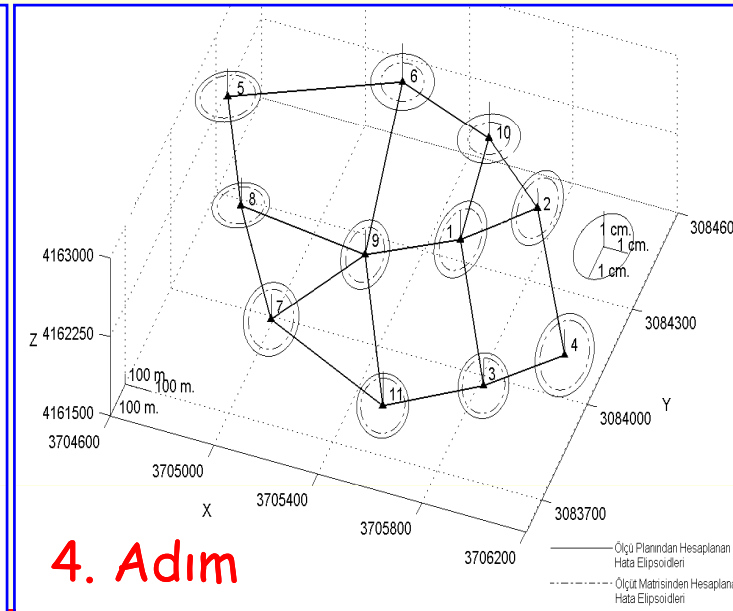
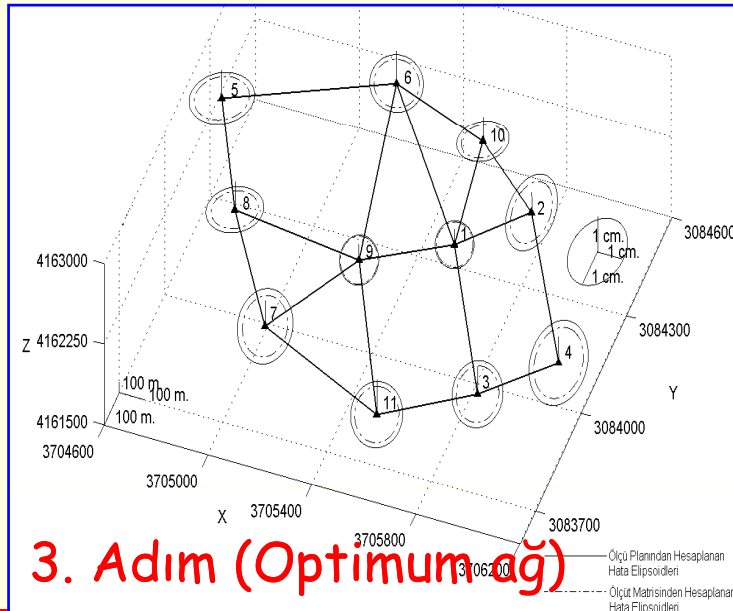
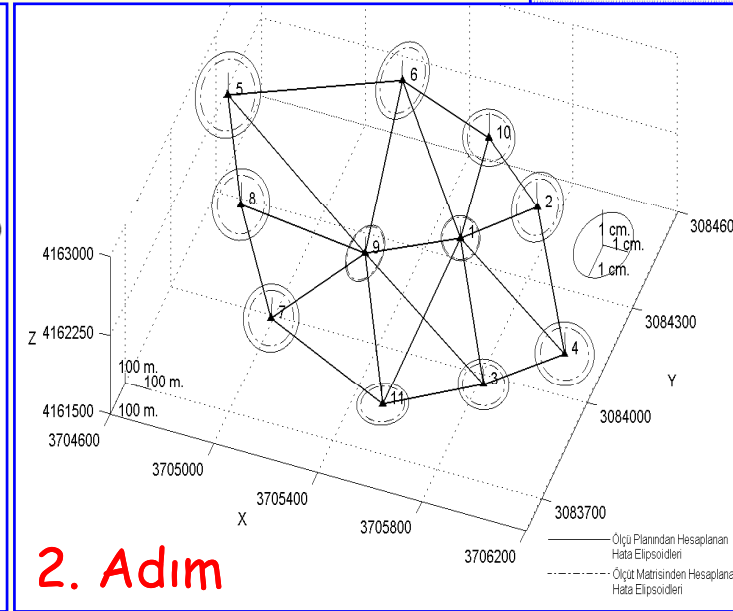
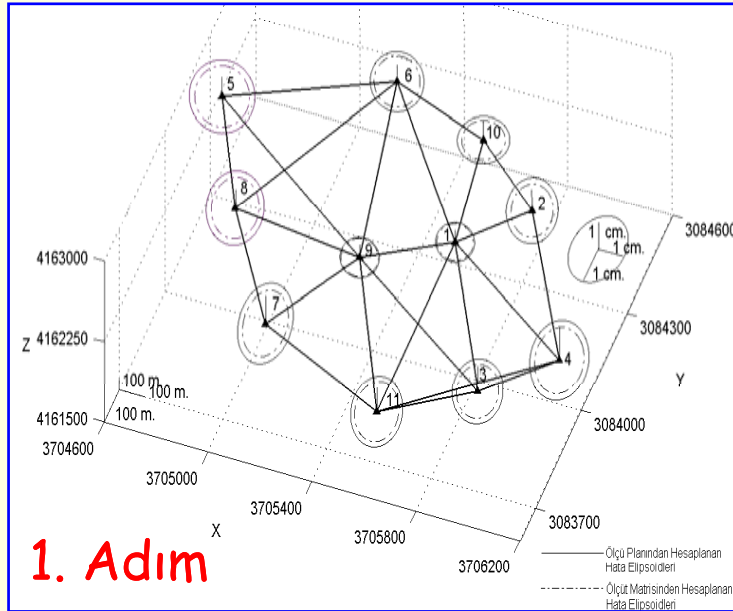
Ölçü planından hesaplanan özdeğerler ve hata elipsoidi yarı eksenleri

Birinci Adım							İkinci Adım						
NN	(A ^T PA) ⁺ Matrisinin Özdeğerleri			(A ^T PA) ⁺ Matrisi Hata Elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)			NN	(A ^T PA) ⁺ Matrisinin Özdeğerleri			(A ^T PA) ⁺ Matrisi Hata Elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)		
	λ_X	λ_Y	λ_Z	A _H (cm)	B _H (cm)	C _H (cm)		λ_X	λ_Y	λ_Z	A _H (cm)	B _H (cm)	C _H (cm)
N1	0.831	0.831	0.831	0.91	0.91	0.91	N1	0.832	0.832	0.832	0.91	0.91	0.91
N2	1.503	1.503	1.503	1.23	1.23	1.23	N2	1.493	1.493	1.493	1.22	1.22	1.22
N3	1.435	1.435	1.435	1.20	1.20	1.20	N3	1.435	1.435	1.435	1.20	1.20	1.20
N4	1.965	1.965	1.965	1.41	1.41	1.41	N4	1.937	1.937	1.937	1.39	1.39	1.39
N5	2.378	2.378	2.378	1.54	1.54	1.54	N5	2.372	2.372	2.372	1.54	1.54	1.54
N6	1.610	1.610	1.610	1.27	1.27	1.27	N6	1.590	1.590	1.590	1.26	1.26	1.26
N7	1.724	1.724	1.724	1.32	1.32	1.32	N7	1.708	1.708	1.708	1.31	1.31	1.31
N8	1.883	1.883	1.883	1.37	1.37	1.37	N8	1.851	1.851	1.851	1.36	1.36	1.36
N9	0.852	0.852	0.852	0.92	0.92	0.92	N9	0.851	0.851	0.851	0.92	0.92	0.92
N10	1.530	1.530	1.530	1.23	1.23	1.23	N10	1.519	1.519	1.519	1.23	1.23	1.23
N11	1.516	1.516	1.516	1.23	1.23	1.23	N11	1.500	1.500	1.500	1.22	1.22	1.22

Ölçü planından hesaplanan özdeğerler ve hata elipsoidi yarı eksenleri

Üçüncü Adım							Dördüncü Adım						
NN	(A ^T PA) ⁺ Matrisinin Özdeğerleri			(A ^T PA) ⁺ Matrisi Hata Elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)			NN	(A ^T PA) ⁺ Matrisinin Özdeğerleri			(A ^T PA) ⁺ Matrisi Hata Elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)		
	λ_X	λ_Y	λ_Z	A _H (cm)	B _H (cm)	C _H (cm)		λ_X	λ_Y	λ_Z	A _H (cm)	B _H (cm)	C _H (cm)
N1	0.840	0.840	0.840	0.92	0.92	0.92	N1	1.019	1.019	1.019	1.05	1.05	1.05
N2	1.493	1.493	1.493	1.22	1.22	1.22	N2	1.655	1.655	1.655	1.32	1.32	1.32
N3	1.450	1.450	1.450	1.22	1.22	1.22	N3	1.659	1.659	1.659	1.36	1.36	1.36
N4	1.962	1.962	1.962	1.41	1.41	1.41	N4	2.033	2.033	2.033	1.45	1.45	1.45
N5	2.390	2.390	2.390	1.56	1.56	1.56	N5	2.417	2.417	2.417	1.57	1.57	1.57
N6	1.590	1.590	1.590	1.26	1.26	1.26	N6	1.585	1.585	1.585	1.26	1.26	1.26
N7	1.708	1.708	1.708	1.31	1.31	1.31	N7	1.716	1.716	1.716	1.32	1.32	1.32
N8	1.851	1.851	1.851	1.36	1.36	1.36	N8	1.875	1.875	1.875	1.38	1.38	1.38
N9	0.851	0.851	0.851	0.92	0.92	0.92	N9	0.909	0.909	0.909	0.97	0.97	0.97
N10	1.528	1.528	1.528	1.25	1.25	1.25	N10	1.527	1.527	1.527	1.25	1.25	1.25
N11	1.500	1.500	1.500	1.22	1.22	1.22	N11	1.539	1.539	1.539	1.25	1.25	1.25

Optimizasyon adımları



Optimal ağırlıklar

Bazlar	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	$\Delta Z(m)$	Optimal Ağırlıklar	Bazlar	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	$\Delta Z(m)$	Optimal Ağırlıklar
N1-N2	164.40	225.27	270.73	0.4403	N5-N6	466.13	352.64	608.43	0.2547
N1-N3	308.11	377.36	32.18	0.3322	N5-N8	224.59	299.62	21.28	0.7603
N1-N6	453.01	395.32	9.14	0.1217	N6-N9	200.19	590.98	284.26	0.1667
N1-N9	252.81	195.66	275.13	0.6208	N6-N10	345.58	23.81	230.79	0.6462
N1-N10	107.43	371.51	239.93	0.2146	N7-N8	277.53	277.33	46.69	0.6739
N2-N4	329.69	386.95	4.43	0.4752	N7-N9	164.20	338.60	298.76	0.2871
N2-N10	271.84	146.23	30.81	0.8597	N7-N11	468.61	67.91	291.97	0.4237
N3-N4	185.98	215.69	234.13	0.7299	N8-N9	441.73	61.27	345.45	0.2170
N3-N11	256.52	221.84	314.10	0.5671	N9-N11	304.41	406.51	6.79	0.2693

+ Sonular ve neriler

+ Jeodezik ağların optimizasyonunda amaç fonksiyonu olarak, ağdan beklenen tüm duyarlık isteklerini yansıtılabilen lt matrisleri seçilmelidir.

+ Genelde ağların homojen ve izotrop yapıda olması istenildiğinden; amaç fonksiyonu olarak, duyarlık yönünden homojen ve izotrop bir ađ beklentisini karşılayan tam izotrop yapıdaki Taylor-Karman lt matrisi oluşturulabilir.

Sonuçlar ve Öneriler

Ölçüt matrisinin inversine direkt yaklaşım (U,m) çözüm algoritmasında, ağırlıkları negatif ve sifıra yakın değer alan bazlar çıkarılarak oluşturulan ölçü planlarından hesaplanan global ölçüt değerlerindeki büyümenin çok az olduğu saptanmıştır.

Buna karşın, optimal olduğuna karar verilen ölçü planından ağırlığı en küçük olan bazın çıkarılması dahi global ölçüt değerinin fazla büyümesine neden olmuştur.

+ Sonuçlar ve neriler

- + Bu durum, optimum ağın ancak ağırlıkları negatif ve sifıra çok yakın değer alan bazların çıkarılması ile oluşturulabileceğini göstermiştir.
- + Ađdan beklenen duyarlılık isteklerinin lut matrisine yaklaşıldığı lude sağlanılabildiği görülmüştür.

TEŐEKKÖR EDERİM