Düzlem Geometri:

Ders 1: Aksiyomatik / Analitik Geometri İlişkisi :

Aksiyom (belit): Doğru olduğu kabul edilen önerme.
Aksiyomatik geometri, sonlu aksiyom ile başlanıp mantıksal çıkarımlarla elde edilen bir geometridir.

Bu geometrinin doğası ve özellikleri, aksiyomların mantık yoluyla birleştirilmesi (sentez) sonucunda ortaya çıktığı için "sentetik geometri" ismi de verilir.
Sentetik bir "düzlem" elde etmenin yolu, boş olmayan bir küme alıp, elemanlarına "nokta", seçilen alt

kümelerine "doğru" dedikten sonra, tanımsız bu kavramların sınırlarını belirleyen varsayımları listelemektir.

İçerme Aksiyomları:

i1) Farklı iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

i2) Her doğru en az 2 nokta içerir.

i3) Hiç bir doğru tarafından hepsi birden içerilmeyen en az 3 nokta vardır.

Örnekler:

1) Düzlem $= \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Nokta $= (x,y)$ sıralı ikilisi,

Doğrular; $\mathbb{R}^2$ ve $\emptyset$ dışındaki

$\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ kümeleri ($a \neq 0$ veya $b \neq 0$).

i1) sağlanır, çünkü $N_1 = (x_1, y_1)$

$N_2=(x_2,y_2)$ verilirse bunları içeren TEK doğru;
$x_1=x_2$ iken $x=x_1$ doğrusu
yani $a=1$, $b=0$, $c=-x_1$ olan doğru,
$x_1\neq x_2$ iken

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$ doğrusudur.

i2) sağlanır, çünkü $ax+by+c=0$ doğrusu için $a\neq 0$ veya $b\neq 0$'dır, mesela $b\neq 0$ iken $y=-\frac{(ax+c)}{b}$

yi kullarak $(0,-\frac{c}{b})$ noktasını ve $(1,\frac{-a-c}{b})$ noktasını elde ederiz.

Benzer şekilde $a\neq 0$ durumu yapılır.

i3) sağlanır, çünkü $(0,0)$, $(1,0)$

ve (0,1) noktalarından geçen doğru olsaydı, $(a,b)\neq(0,0)$ olacak şekilde $a,b,c\in\mathbb{R}$ için, $ax+by+c=0$ şeklinde bir denklemi olurdu.

$x=0, y=0 \Rightarrow c=0$

$x=1, y=0 \Rightarrow a=0$

$x=0, y=1 \Rightarrow b=0$, çelişki!

2-) Düzlem = 3 elemanlı bir küme

Doğru = 2 elemanlı altkümeler

i1, i2, i3 'ün sağlandığı görülür.

 → arada nokta yok!

*Bütün düzlemde 3 nokta ve 3 doğru var!

Tanım: Kesişmeyen doğrulara paralel denir. Bir doğru kendisine paralel kabul edilecektir.

Paralellik aksiyomu:

P) Bir d doğrusu ve d'nin içermediği bir A noktası verilsin. A'yı içeren ve d'ye paralel olan en fazla bir doğru vardır.

Ödev:

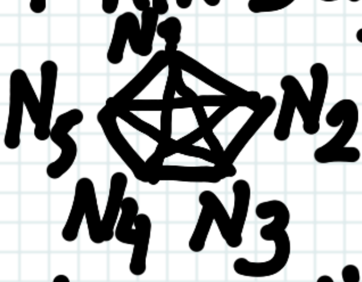
İlk iki örnek P'yi sağlar, görünüz (ödev).

3.) Düzlem = 5 nokta kümesi

doğrular: 2 elemanlı bütün altkümeler

i1-i3)'ün sağlandığını görmek kolay.

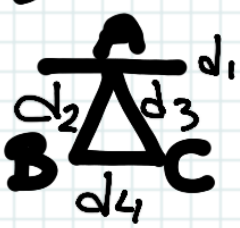
P'nin sağlanmadığını görelim:



$d=\{N_1,N_2\}$ $A=N_4$ için $d // d'$ ve $A\in d'$ olan 2 doğru $d'=\{N_4,N_5\}$ ve $d'=\{N_3,N_4\}$ var!

Ödev:

1) Düzlem $= \{A, B\} =$ doğru ise i1, i2, P'nin sağlandığını ama i3'ün sağlanmadığını gösteriniz.

2) 

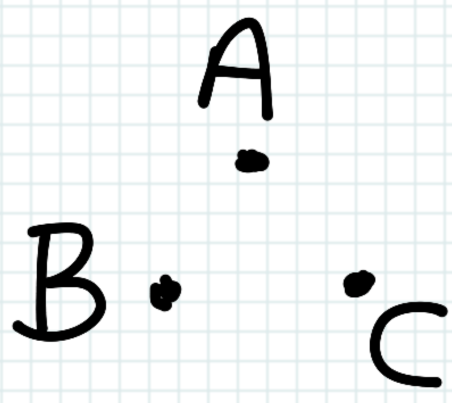
Düzlem $= \{A, B, C\}$

$d_1 = \{A\}$, $d_2 = \{A, B\}$, $d_3 = \{A, C\}$ $d_4 = \{B, C\}$

ise i1, i3, P'nin sağlandığını ama i2'nin sağlanmadığını gösteriniz.

3) Düzlem $= \{A, B, C\}$, doğru yok

ise i1'in sağlanmadığını ama kalan 3 aksiyomun sağlandığını gösteriniz.



Arada Olma Aksiyomları:

A, B, C noktaları için, B'nin A ve C "arasında olması" olarak ifade edilen ve $A*B*C$ ile gösterilen ilişkinin sınırlarını tayin eden aksiyomlar:

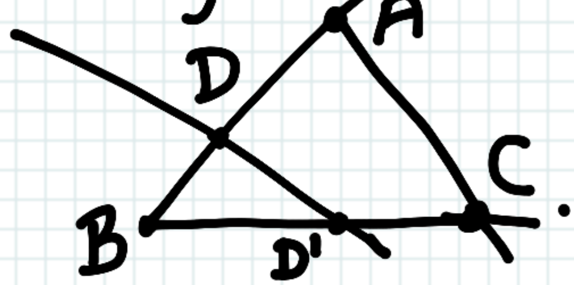
A01: Eğer $A*B*C$ ise A, B ve C bir doğru üzerindeki 3 farklı noktadır ve $C*B*A$.

A02: Farklı A ve B noktaları için öyle bir C noktası vardır ki $A*B*C$ dir.

A03: Bir doğru üzerindeki farklı 3 noktadan yalnızca 1 tanesi diğerlerinin arasındadır.

A04: A, B, C aynı doğru üzerinde bulunmayan 3 (farklı) nokta, ℓ bunlardan geçmeyen bir doğru olsun. Eğer ℓ, A ve B arasında bulunan bir noktadan geçerse ya A ve C arasındaki bir noktadan ya da B ve C arasındaki bir noktadan geçer ama ikisinden birden değil.

ya da



Tanım: (Doğru parçası) A ve B farklı iki nokta olsun. A, B ve ikisinin arasındaki noktaların kümesine AB doğru parçası denir.

Üçgen: A, B ve C aynı doğru üzerinde bulunmayan üç nokta iken ABC üçgeni $AB \cup AC \cup BC$ kümesi olarak tanımlanır.

Ödev: $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a<c<b$ veya $a>c>b$ ise $a * c * b$ yazalım.

$A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$, $C=(c_1, c_2)$ için $a_1 * c_1 * b_1$ veya $a_2 * c_2 * b_2$ ise $A * C * B$ yazalım ve C, A ve B arasında bulunur diyelim. Bu durumda AO1, AO2, AO3 ve AO4'ün sağlandığını gösteriniz.