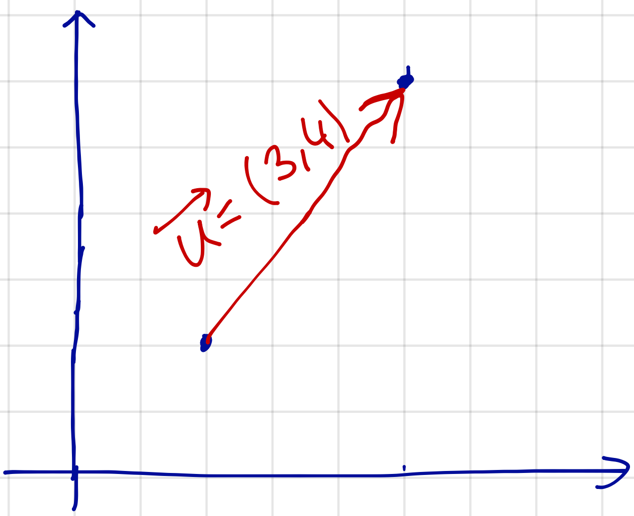
BAZI AFİN DÖNÜŞÜMLER

Afin dönüşümler: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

1) öteleme: $A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için T afin dönüşümüne öteleme denir ve $\ddot{O}_{(c_1,c_2)}$ ile gösterilir.

$$\ddot{O}_{(c_1,c_2)}(x,y) = (x+c_1, y+c_2)$$

Ör: $\ddot{O}_{(3,4)}(x,y) = (5,6) \Rightarrow (x,y) = (5,6)-(3,4) = (2,2)$.



Önerme: Ötelemeler, 1) uzaklığı 2) vektörleri 3) açıları 4) doğruların eğimlerini korur.

İspat: 1) $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ old. için $a_1^2 + a_2^2 = 1$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ ve $b_1^2 + b_2^2 = 1$ sağlanır.

2) $A' = \ddot{O}_{(c_1,c_2)}(A)$ ve $B' = \ddot{O}_{(c_1,c_2)}(B)$ dersek

$$\overrightarrow{A'B'} = B' - A' = B - A = \overrightarrow{AB}$$

3) Vektörler öteleme altında değişmediğinden aralarındaki açı da değişmez.

4) $y = mx + n \xrightarrow[\substack{x = x' - c_1 \\ y = y' - c_2}]{} y' - c_2 = m(x' - c_1) + n \Leftrightarrow y' = mx' + ?$

$(m = \infty)$ $x = n \longrightarrow x' - c_2 = n \Leftrightarrow x' = c_2 + n$ $(m = \infty)$

Sonuç: ötelemeler, çemberi, elipsi, hiperbolü, parabolü korur.

İspat: Çünkü bunların hepsi uzaklığa bağlı.

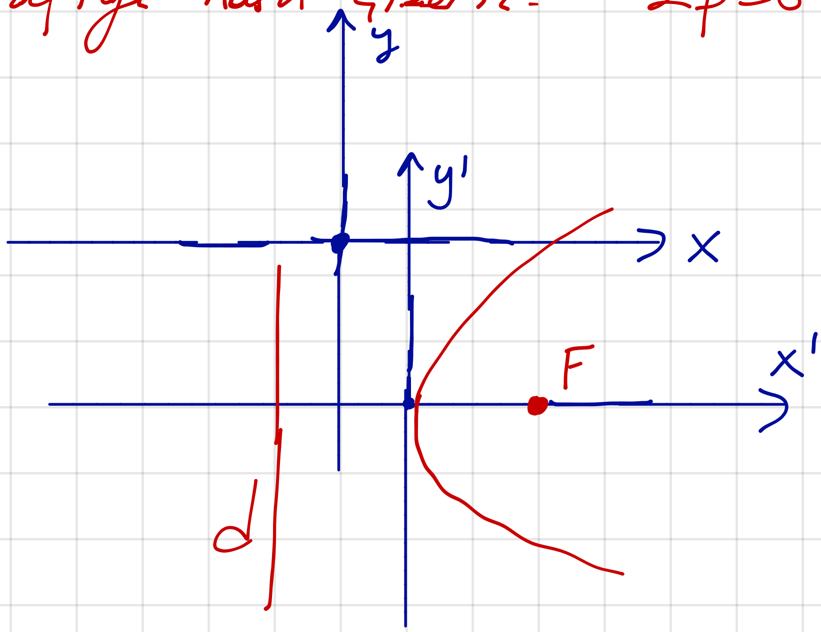
Ör: Denklemi $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$ olan geometrik nesne = ?

$$\Updownarrow$$

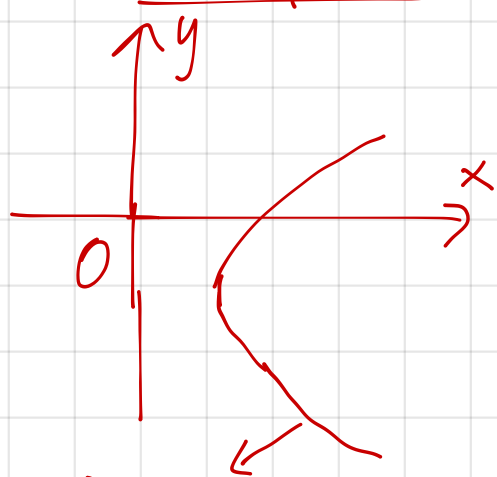
$$(y+3)^2 = 8(x-1) \Longleftrightarrow y'^2 = 2px'$$

$\boxed{\begin{matrix} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{matrix}}$ dönüşümü $\ddot{O}_{(-1,3)}$ ötelemesi olduğundan ve ötelemeler parabolü koruduğundan sorulan geometrik nesne bir paraboldür.

Grafiği nasıl çizeriz? $2p=8$ $\quad p/2=2.$



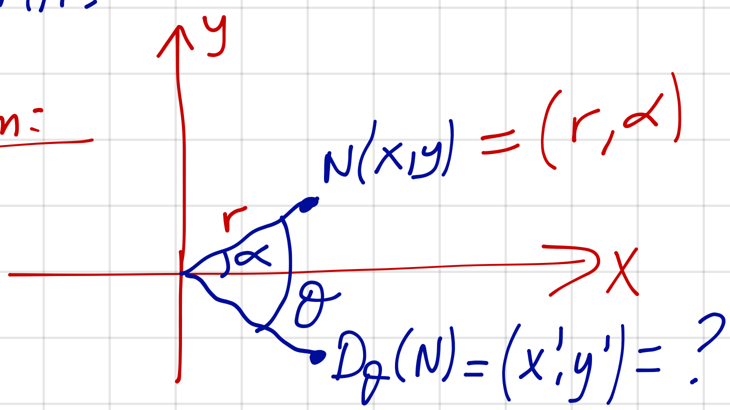
Grafiği



$y^2-8x+6y+17=0$ parabolü

2) Döndürme: $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ iken T afin dönüşümüne θ radyan döndürme denir ve $\mathcal{D}_\theta$ ile gösterilir.

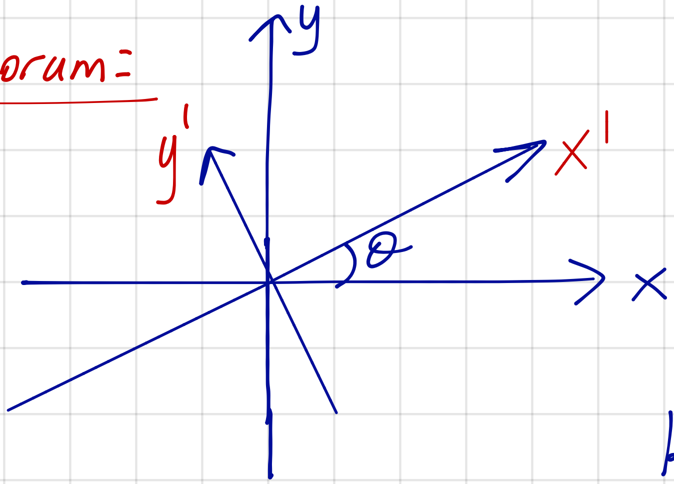
1. yorum:



$$(x',y')=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos(\alpha-\theta)\\ r\sin(\alpha-\theta)\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $(r\cos(\alpha-\theta), r\sin(\alpha-\theta))$, (x',y')'nün kutupsal koordinatlarıdır. Demek ki, $\mathcal{D}_\theta(x,y)$, (x,y)'nin orijin etrafında saat yönünde θ radyan döndürülmesiyle elde edilen nokta.

2. yorum:

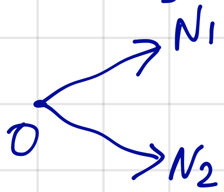


$(x',y') = \mathcal{D}_\theta(x,y)$ sıralı ikilisi (x,y) noktasının $x'y'$-koordinat sistemindeki koordinatları olarak yorumlanır.

Önerme: $\mathcal{D}_\theta$, $\theta \neq 0$, uzaklığı ve aradaki açıyı korur.

İspat: $a_1 = \cos\theta$ $b_1 = \sin\theta$ $a_2 = -\sin\theta$ $b_2 = \cos\theta$ olduğundan

$a_1^2 + a_2^2 = 1$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, $b_1^2 + b_2^2 = 1$ olur ki bu uzaklığın korunması demektir.



$N_1' = \mathcal{D}_\theta(N_1)$ ve $N_2' = \mathcal{D}_\theta(N_2)$ dersek

$\overrightarrow{ON_1} \cdot \overrightarrow{ON_2} = \overrightarrow{ON_1'} \cdot \overrightarrow{ON_2'}$ olduğunu görmek kolay.

İç çarpım korunduğu için bu vektörler arasındaki açı da korunur.

Ör: $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ old.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathcal{D}_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ olur. $\mathcal{D}_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = (y,-x)$.

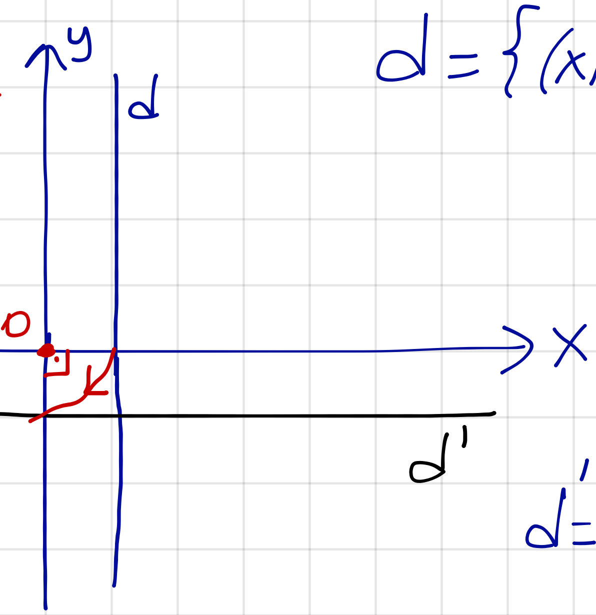
$\mathcal{D}_{\pi/2}(1,0) = (0,-1)$ olur.

Uyarı: Bazı kitaplar, θ radyan döndürme ile saat yönünün tersinde döndürmeyi kasteder ve başka bir formül kullanırlar.

$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ ise $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ olduğundan

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}_{\text{(x,y) saat yönünde } \theta \text{ radyan döndürülüyor}} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}}_{\text{(x',y') saat yönünün tersinde } \theta \text{ radyan döndürülüyor.}}$$ olur.

Ör: $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=1\}$ ise $D_{\pi/2}(d)=?$



1. yol: $d=\{(1,t)\,/\,t\in\mathbb{R}\}$

$D_{\pi/2}(1,t)=(t,-1)$

$d'=D_{\pi/2}(d)=\{(t,-1)\mid t\in\mathbb{R}\}$

$d'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=-1\}$.

2. yol: $D_{\pi/2}(x,y)=(y,-x)=(x',y')$ olduğundan

$x=1 \underset{-x=y'}{\Longleftrightarrow} -y'=1 \Leftrightarrow \boxed{y'=-1}$, d''nün $x'y'$-koord. sistemindeki denk.

Sonuç: D_θ, çemberi, elipsi, hiperbolü, parabolü korur!

Ör: $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2-y^2=16\}$ $\quad \mathcal{D}_{\pi/4}(H)=?$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\pi/4 & \sin\pi/4 \\ -\sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \circledast$$

$$(x',y')\in \mathcal{D}_{\pi/4}(x,y) \Leftrightarrow \exists\, (x,y)\in H : \mathcal{D}_{\pi/4}(x,y)=(x',y')$$

$\circledast$ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$ ve $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$ olduğundan

$$x^2-y^2=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x'-y')^2-\frac{1}{2}(x'+y')^2=16$$

$$\Leftrightarrow -2x'y'=16 \Leftrightarrow \boxed{x'y'=-8}$$

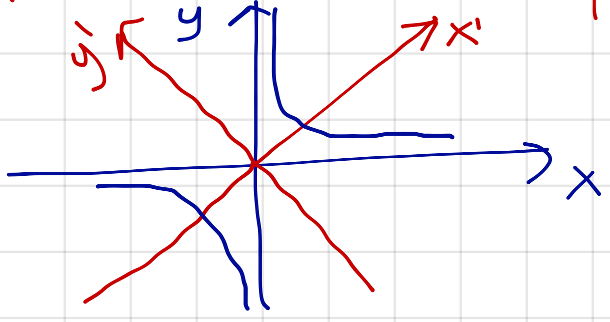
$$\mathcal{D}_{\pi/4}(H)=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 / \ x'y'+8=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ xy+8=0\}.$$

Ör: $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ xy=1\}$ geometrik nesnesi nedir?

$\circledast$'dan $\quad xy=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1}$$

$\mathcal{D}_{\pi/4}(K)=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 / \ \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1\}$ hiperbol olduğu için K da bir hiperboldür.



Ör: (Elipsi çembere dönüştürelim)

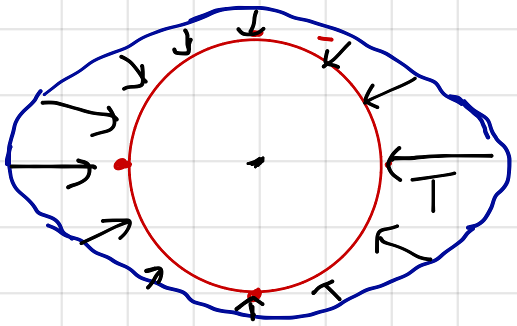
$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\}$ ise $T(E)=\mathcal{C}((0,0),1)$

olacak $T=?$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=1 \iff x'^2+y'^2=1$ olacak afin

dönüşüm $\boxed{\begin{aligned} x'&=\frac{x}{2} \\ y'&=\frac{y}{\sqrt{3}} \end{aligned}}$ formülü ile verilir.

Yani $T(x,y)=(x/2\,,\,y/\sqrt{3})$ afin dön. için $T(E)=\mathcal{C}((0,0),1)$!



T elipsi çembere büzüyor!

Ör: $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$ a) $\ddot{O}_{(0,1)}(d)=d'=?$

b) $\mathcal{D}_{\pi/4}(d')=d''=?$

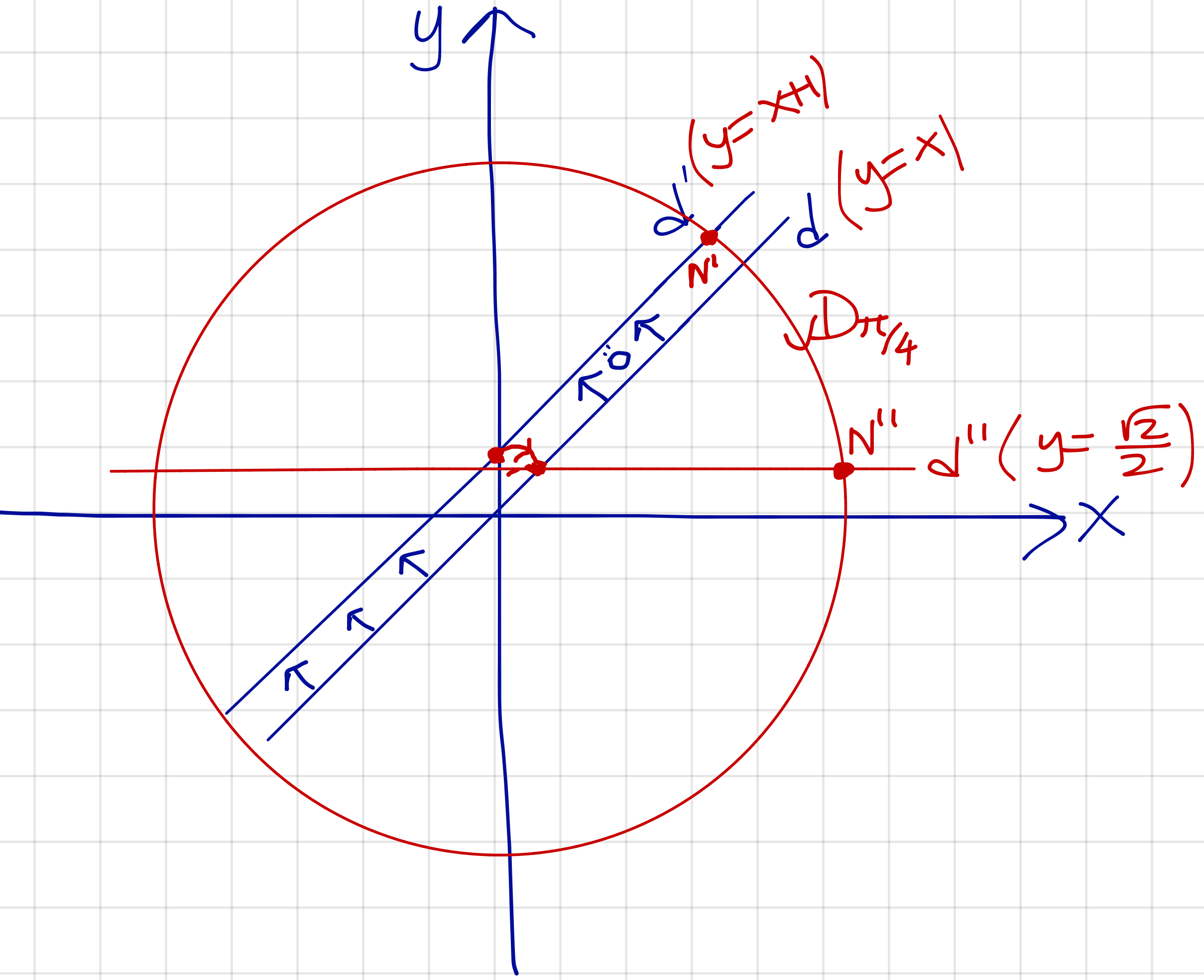
a) $\left.\begin{aligned} x'&=x \\ y'&=y+1 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x&=x' \\ y&=y'-1 \end{aligned}\right\}$ $\ddot{O}_{(0,1)}$. $\underbrace{\boxed{y=x}}_{d} \iff y'-1=x' \iff \underbrace{\boxed{y'=x'+1}}_{d'}$

2. yol: $d=\{(t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ o.k. $d'=\{\underbrace{(t,t+1)}_{\ddot{O}_{(0,1)}(t,t)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ olur.

b) $\left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') \end{array}\right\}$ (*)'dan.

$\underset{d'}{\boxed{y' = x' + 1}} \iff \frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y'') + 1$

$\iff \sqrt{2}\, y'' = 1 \iff \boxed{y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}}\ d''$



Şimdi d'yi önce $\pi/4$ radyan döndürelim sonra öteleyelim:

$\underset{d}{\boxed{y = x}} \overset{}{\underset{(*)}{\iff}} \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \iff \boxed{y' = 0}\ d'$ (x'-ekseni)

$Ö_{(0,1)}(d') = ?$ $\quad \boxed{y'=0} \iff y''-1=0 \iff \boxed{y''=1} \to d''$ değil.

$x' = x''$ ve $y' = y'' - \frac{\sqrt{2}}{2}$ için $\boxed{y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}}\ d''$ olur. Yani $Ö\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olmalı.

Ör: Denklemi $16x^2+64x+9y^2-54y+1=0$ olan geometrik nesne nedir bulup grafiğini çiziniz.

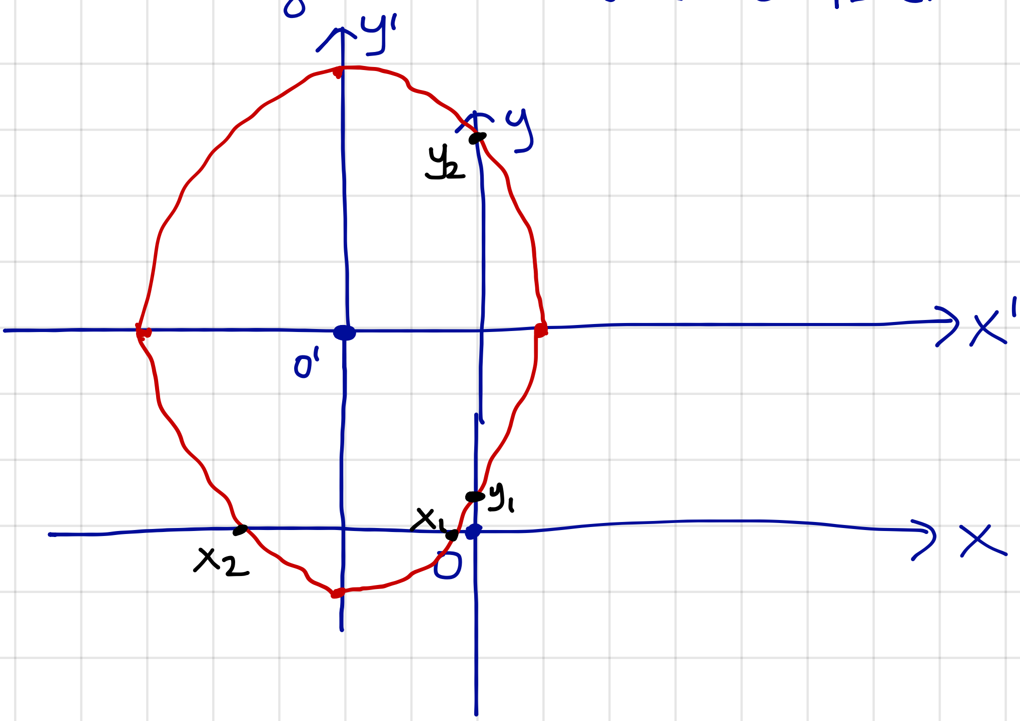
$$16(x+2)^2-64+9(y-3)^2-81+1=0 \iff$$

$$16(x+2)^2+9(y-3)^2=144 \iff \frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\begin{array}{l} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{array}}$ ötelemesi için $\boxed{\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{16}=1}$ elips

Ötelemeler elipsi, elipse dönüştürdüğünden soruda verilen geometrik nesne elipstir.



$$x=0 \Rightarrow 9y^2-54y+1=0 \iff 9(y-3)^2=80 \iff y_{1,2}=\underbrace{3\mp\frac{4\sqrt{5}}{3}}_{\text{pozitif}}$$

$$y=0 \Rightarrow 16(x+2)^2=63 \iff x_{1,2}=-2\mp\frac{\sqrt{63}}{4}<0$$