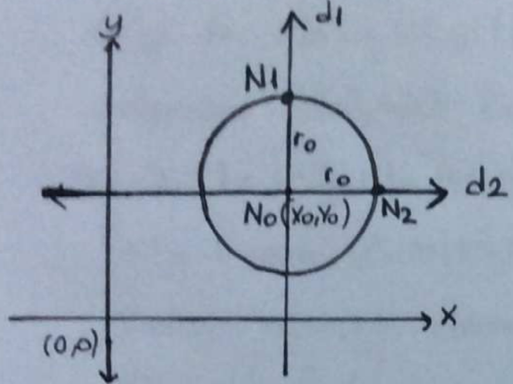
(19-23 Ekim)

UYGULAMA: Koordinat dönüşümü uygulayarak yarıçapı r_0 olan bir çemberi merkezi $(0,0)$ yarıçapı 1 olan bir çemberle 1-1 eşleyebiliriz:



$d_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a(x-x_0)=0\}$ ($a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için)

$d_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid b(y-y_0)=0\}$ ($b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için)

ilişki :	$x'=a(x-x_0)$ $y'=b(y-y_0)$	olabilir ama $a=?$ $b=?$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_0^2 \iff \left(\frac{x-x_0}{r_0}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{r_0}\right)^2=1 \iff x'^2+y'^2=1$$

Demekki $a=b=\frac{1}{r_0}$ olup $T(x,y)=\left(\frac{x-x_0}{r_0},\frac{y-y_0}{r_0}\right)$ tanımlamalıyız.

$T(N_0)=(0,0)=0'$ $T(N_1)=T(x_0,y_0+r_0)=(0,1)=N_1'$ ve

$T(N_2)=T(x_0+r_0,y_0)=(1,0)=N_2'$ olur.

$\bar{u}(N_0,N_1)=u'(0',N_1')=1$, çünkü $u'(0',(x',y'))=\sqrt{x'^2+y'^2}$

$\bar{u}(N_0,N_2)=u'(0',N_2')=1$ ama $u(N_0,N_1)=u(N_0,N_2)=r_0$ idi.

$\bar{u}(N_0,N)=u'(0',(x',y'))=\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{1}{r_0}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\neq u(N_0,N)$

($r_0\neq 1$ için)

Şimdi bu kolaylaştırmadan faydalanarak aşağıdaki soruları cevaplayabiliriz:

1) $Ç(N_0,r_0)$ ve bir d doğrusu kaç noktada kesişir?

2) $Ç(N_0,r_0)$ kaç elemana sahip?

$\boxed{\text{Anahtar: } (x,y)\in d\cap Ç(N_0,r_0) \iff (x',y')\in T(d)\cap Ç'(0',1)}$

Örnek 4) $Ç(N_0,r_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-2)^2=9\}$ çemberi ile $(-2,2)$'den geçen $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$, (burada, $-2a+2b+c=0$), doğrusunun kesişimi, Aslında,

$$d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a(x+2)+b(y-2)=0\}.$$

Soru: $d \cap \mathcal{C}(N_0, r_0) = ?$

$x' = \frac{x-1}{3}$ $\quad y' = \frac{y-2}{3}$ dönüşümü çemberi $x'^2 + y'^2 = 1$ çemberine

d'yi de $d'_\infty = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid x' = n\}$ veya $d'_m = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y' = mx' + n\}$

doğrusuna dönüştürür. Bu doğru

$T(-2,2) = (-\frac{3}{3}, 0) = (-1,0)$ noktasından geçtiği için denklemi

$x' = -1$ veya $y' = m(x'+1)$ olur.

Kesişim kümesinin elemanları

(i) $\boxed{\begin{matrix} x'^2 + y'^2 = 1 \\ x' = -1 \end{matrix}}$ veya (ii) $\boxed{\begin{matrix} x'^2 + y'^2 = 1 \\ y' = m(x'+1) \end{matrix}}$ sisteminin çözümüdür.

(i) Tek çözüm var: $(-1,0)$ çünkü $(-1)^2 + y'^2 = 1 \Rightarrow y' = 0$!

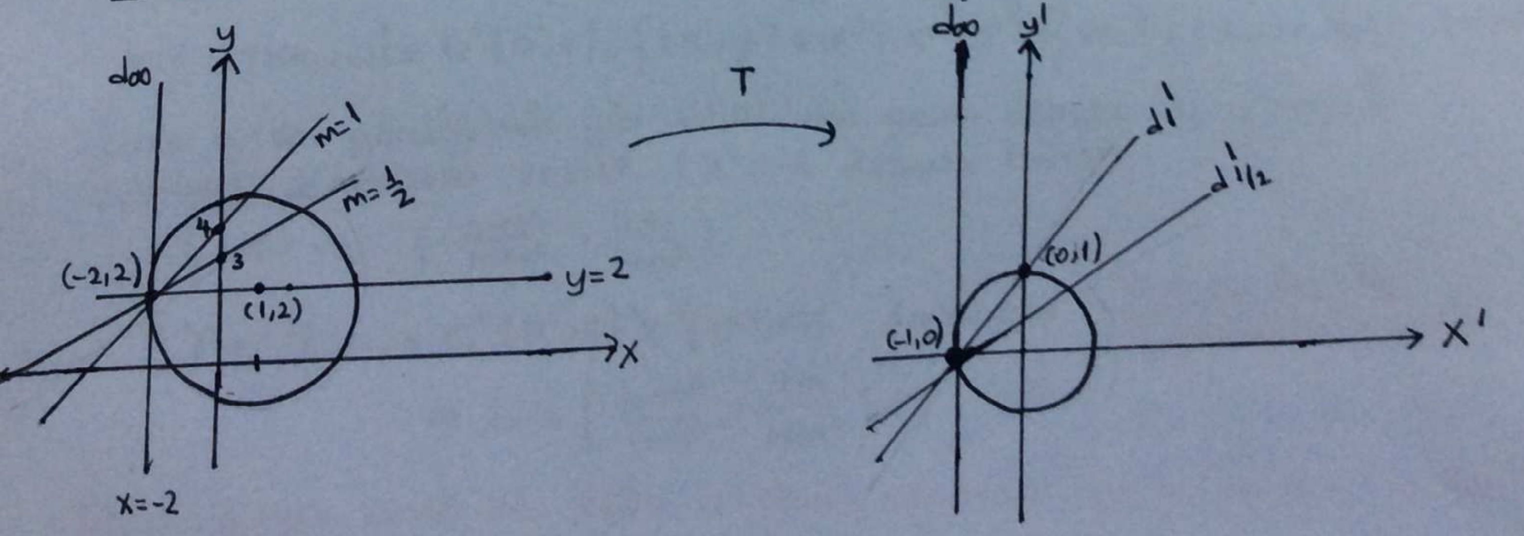
(ii) $x'^2 + (m(x'+1))^2 = 1 \Leftrightarrow x'^2 + m^2x'^2 + 2m^2x' + m^2 = 1 \Leftrightarrow (1+m^2)x'^2 + 2m^2x' + m^2 - 1 = 0$

$\Delta = m^4 - (1+m^2)(m^2-1) = 1 > 0$ old. için $x'_{1,2} = \frac{-m^2 \mp 1}{1+m^2} \Rightarrow x'_1 = -1 \quad x'_2 = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

$x'_1 = -1$ iken $y' = m(0) = 0 \quad x'_2 = \frac{1-m^2}{1+m^2} \Rightarrow y'_2 = m\left(\frac{1-m^2}{1+m^2} + 1\right) = \frac{2m}{1+m^2}$

iki çözüm var: $(-1,0)$ ve $\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$.

Sonuç: $\mathcal{C}'(0',1) \cap d'_\infty = \{(-1,0)\}$; $\mathcal{C}'(0',1) \cap d'_m = \left\{(-1,0), \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)\right\}$.



Baştaki problemin çözümü $= T^{-1}(-1,0)=(-2,2)$ tek çözüm veya

$d_m = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{y-2}{3} = m\left(\frac{x+2}{3}\right)\}$ üzerindeki iki nokta $=(x,y) = (3x'+1, 3y'+2)$

$(x,y) = T^{-1}(-1,0) = (-2,2)$;

$$T^{-1}\left(\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)\right) = \left(\frac{3(1-m^2)}{1+m^2}+1,\ 3\frac{2m}{1+m^2}+2\right) = \left(\frac{4-2m^2}{1+m^2}, \frac{2m^2+6m+2}{1+m^2}\right) = (x,y)$$

Önerme 4: Bir çember ve bir doğrunun kesişiminde 0, 1 veya 2 nokta vardır.

İspat: Çemberi $\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid x'^2+y'^2=1\}$ ile eşlersek,

(i) $x'=n$ doğrularıyla kesişimi: $n^2+y'^2=1 \Rightarrow y'^2=1-n^2 \Rightarrow y' = \mp\sqrt{1-n^2} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1-n^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1\leq n\leq 1$.

Yani $|n|>1$ iken kesişim boş, $|n|=1$ iken kesişim $(n,0)$ noktası, $-1<n<1$ iken $(n,-\sqrt{1-n^2})$ ve $(n,\sqrt{1-n^2})$ noktalarıdır.

(ii) $y'=mx'+n$ doğrularıyla kesişimi $= x'^2+(mx'+n)^2=1 \Rightarrow (1+m^2)x'^2+2mnx'+n^2-1=0$

$\Delta = m^2n^2-(1+m^2)(n^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow \Delta = m^2-n^2\geq 0 \Leftrightarrow |m|\geq|n|$

$$\text{Kesişimdeki nokta sayısı} = \begin{cases} 0, & |m|<|n| \text{ ise} \\ 1, & |m|=|n| \text{ ise} \\ 2, & |m|>|n| \text{ ise}\end{cases}$$

Önerme 5

$Ç(N_0,r_0)\setminus\{(x_0-r_0,y_0)\}$ ile $\mathbb{R}$ 1-1 eşlenebilir.

İspat: $T=\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y) = \left(\frac{x-x_0}{r_0}, \frac{y-y_0}{r_0}\right) = (x',y')$ için

$T(Ç(N_0,r_0)) = Ç'(0',1) = \{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid x'^2+y'^2=1\}$ ve $T((x_0-r_0,y_0)) = (-1,0)$.

Örnek 4'de gördüğümüz gibi $(-1,0)$'dan geçen doğrular ile $Ç'(0',1)$ çemberi 2 noktada kesişir. ($x'=-1$ doğrusu hariç):

$(-1,0)$ ve $\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$

$\varphi = \mathbb{R}\longrightarrow Ç'(0',1)\setminus\{(-1,0)\}$ fonksiyonu 1-1 ve örtendir (gösteriniz, ÖDEV3)

$m \longrightarrow \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$

$\therefore T^{-1}\circ\varphi : \mathbb{R}\to Ç(N_0,r_0)\setminus\{(x_0-r_0,y_0)\}$ istenen birebir eşlemedir. $\square$

ÖDEV4: N_0'dan geçen her doğru $Ç(N_0,r_0)$ çemberini tam iki noktada keser, gösteriniz.

İpucu: Uygun bir T ile merkezi $0'=(0,0)$'a taşıyın.

Ödev 5: İki farklı çember en fazla iki noktada kesişir, gösteriniz.

ipucu: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0 \end{array}\right.$

Ödev 6: Doğrudaş olmayan üç noktadan geçen tek çember olduğunu, gösteriniz.

ipucu: İki çember de bu üç noktadan geçiyorsa 2'den fazla ortak noktası olduğundan yararlanın. Bu, 3 noktadan en fazla 1 çember geçebileceğini ispatlar. En az bir çemberin de bulunduğunu göstermelisiniz.

Ödev 7: Doğrudaş 3 noktadan geçen çember yoktur, gösteriniz.

ipucu: Öyle bir çember olsaydı, doğru ile 2'den fazla noktada kesişirdi.

Tanım = Bir çember ile bir doğru tek bir noktada kesişirse doğruya çemberin o noktadaki "teğet"i denir.

Ödev 8: T dönüşümünün eğimleri korumadığını bir örnek vererek sergileyiniz.

ipucu: Dik koordinattan eğik koordinata geçiş fonksiyonu.

Ödev 9: $T(x,y)=\left(\frac{x-x_0}{r_0}, \frac{y-y_0}{r_0}\right)$'ın eğimleri koruduğunu gösteriniz.

ipucu: $T(x,y)=(x',y') \Leftrightarrow (x,y)=(r_0x'+x_0, r_0y'+y_0)$

- $d_\infty=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=n\} \Leftrightarrow d'_\infty=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid x'=\frac{n-x_0}{r_0}\}$
- $d_m=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=mx+n\} \Leftrightarrow d'_m=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid r_0y'+y_0=m(r_0x'+x_0)+n\}$

$\Leftrightarrow d'_m=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid y'=mx'+\left(\frac{mx_0+n}{r_0}\right)\}$

Ödev 10: $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ doğrusu bir çembere teğetse ve merkezi bu noktaya bağlayan doğrunun denklemi $a_1x+b_1y+c_1=0$ ise $aa_1+bb_1=0$'dır, gösteriniz.

ipucu: ödev9'daki dönüşümü kullanabilirsiniz.

Ödev 11: $d_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a_1x+b_1y+c_1=0\}$ bir çemberin merkezinden geçsin. $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ ve $aa_1+bb_1=0$ ise d çembere $d\cap d_1$ noktasında teğettir, gösteriniz.