Üçgen eşitsizliği: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

İspat: $a = \|\vec{u}+\vec{v}\|$ ve $b = \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ dersek

$a \leq b$ veya denk olarak $a-b\leq 0$ olduğunu görmeliyiz.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ve $a+b\geq 0$ olduğundan

$a^2-b^2\leq 0 \Leftrightarrow a-b\leq 0$ 'dır.

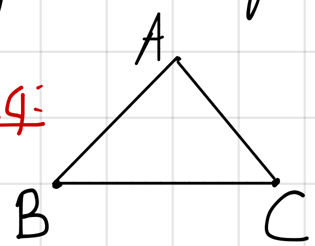
$$a^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}} + \|\vec{v}\|^2$$

$$b^2 = (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\boxed{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} + \|\vec{v}\|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, $a^2\leq b^2$ yani $a\leq b$ olur.

Sonuç:



$u(A,C) \leq u(A,B) + u(B,C)$ 'dir.

Kanıt: $u(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$ olduğundan iddia üçgen

eşitsizliğinin doğrudan bir sonucudur, çünkü

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AC}\|}_{u(A,C)} = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\| \leq \underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}_{u(A,B)} + \underbrace{\|\overrightarrow{BC}\|}_{u(B,C)}$$

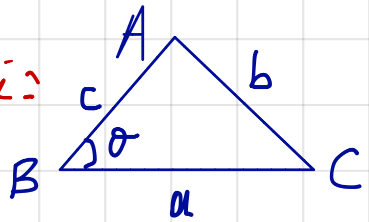
elde edilir.

Tanım: $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ sıfır olmayan iki vektör ise bunlar arasındaki açının ölçüsü $\cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) =: \theta$ radyan olarak tanımlanır. Burada, $\cos^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$ fonksiyonunun varlığını Analiz I dersine borçluyuz.

Tanım: $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ arasındaki açının ölçüsü $\dfrac{\pi}{2}$ radyan ise $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ diktir denir ve $\vec{u} \perp \vec{v}$ ile gösterilir.

Gözlem: 1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ 2) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Kosinüs Teoremi:

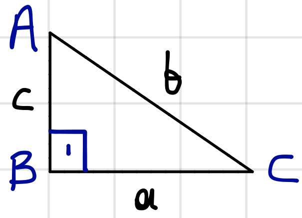


üçgeninde $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$'dır.

İspat: θ, $\overrightarrow{BA}$ ile $\overrightarrow{BC}$ arasındaki açının ölçüsü ve $b = \|\overrightarrow{AC}\|$ olduğundan, $b^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}) =$

$$= \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\underbrace{(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})}_{\|\overrightarrow{BC}\|\cdot\|\overrightarrow{BA}\|\cos\theta} + \|BA\|^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$$ olur.

Sonuç: (Pisagor teoremi)



ise $b^2 = a^2 + c^2$.

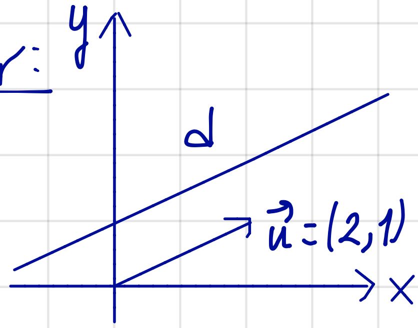
Kanıt: $\overrightarrow{BA}$ ile $\overrightarrow{BC}$ arasındaki açı $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ radyan olduğundan $\cos\theta = 0$ olur. Kosinüs teoremi kanıtı bitirir.

Doğrular ve Vektörler

Doğrultu vektörü: Doğrultu kavramını matematiksel olarak paralel doğruların denklik sınıfı olarak tanımlamıştık. İki vektörün eşit olması için doğrultularının, yönlerinin ve boylarının aynı olmaları gerektiğini kanıtlamıştık. Dolayısıyla her vektör bir doğrultu belirtir ancak yönleri veya boyları farklı vektörler aynı doğrultuyu belirtebilirler.

Tanım: d doğrusu ve $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ vektörü verilsin. Eğer $\overleftrightarrow{OP} \,//\, d$ ise $\vec{u}$'ya d'nin bir doğrultu vektörü denir.

Ör:



$d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2y+2=0\}$

$\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ ve $P=(2,1)$ olduğundan

$\overleftrightarrow{OP}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2y=0\}$ olur.

$d \,//\, \overleftrightarrow{OP}$, çünkü iki doğrunun eğimi de $1/2$'dir.

Bu yüzden, $\vec{u}$ vektörü d'nin bir doğrultu vektörüdür.

Uyarı: Doğrultu vektörü ve eğim aynı bilgiyi verir.

$\vec{u}=(x_0,y_0)$ ve $x_0\neq 0 \Leftrightarrow$ eğim $= y_0/x_0$. $\vec{u}=\overrightarrow{OP}=(0,y_0) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{OP}$ doğrusu $x=0$!

Önerme: $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$ olsun. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\vec{u} = t\vec{v}$.

Kanıt: $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ ve $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ olsun. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \underbrace{\overleftrightarrow{OP} \cap \overleftrightarrow{OQ} = \emptyset}_{}$ veya $\boxed{\overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OQ}}$

yanlış, çünkü $O \in \overleftrightarrow{OP} \cap \overleftrightarrow{OQ}$

$\Leftrightarrow$ O, P, Q doğrudaştır.

$\boxed{\text{O, P, Q doğrudaş ise}}$ $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusunun denklemi $x=0$ veya $m \in \mathbb{R}$ için $y = mx$ şeklindedir.

$x=0$ iken $P = (0, u_2)$ ve $Q = (0, v_2)$ olmak zorunda.

$\vec{u} = (0, u_2)$, $\vec{v} = (0, v_2)$ olduğundan $t = \frac{u_2}{v_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\vec{u} = t\vec{v}$ olur.

$y = mx$ iken $\vec{u} = (u_1, mu_1) = P$ ve $\vec{v} = (v_1, mv_1)$ olur.

$t = \frac{u_1}{v_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $\vec{u} = t\vec{v}$ olur.

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow$ O, P, Q doğrudaş $\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \vec{u} = t\vec{v}$ olur.

Tersine, $\vec{u} = t\vec{v}$ olacak $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ varsa $(u_1, u_2) = (tv_1, tv_2)$ olur. $\underline{v_1 = 0} \Rightarrow u_1 = t \cdot 0 = 0$ olur. $\Rightarrow$ P ve Q, $x=0$ üzerindedir.

$\Rightarrow$ O, P ve Q doğrudaştır $\Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

$v_1 \neq 0$ ise $m = \dfrac{v_2}{v_1} \in \mathbb{R}$ için $v_2 = m v_1$ olur.

$(u_1, u_2) = (t v_1, t m v_1)$ olduğundan $u_2 = m u_1$ olur.

Yani P ve Q, $y = mx$ doğrusu üzerindedir.

O, P ve Q doğrudaştır $\Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$'dir. $\square$

Uyarı: $\vec{0}$ ile her $\vec{v}$ vektörü paralel kabul edilir.

Dolayısıyla, Önerme, $\vec{v} \neq 0$ iken, $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \vec{u} = t\vec{v}$

şeklinde genellenebilir. ($\vec{v} = 0$ iken $\vec{u} = t \cdot \vec{0} = \vec{0}$ olur!)

Önerme: $\vec{0} \neq \vec{u}$'ya paralel (yani, doğrultu vektörü $\vec{u}$)

olan ve A'dan geçen bir TEK doğru vardır ve

$d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a_1 + t u_1$ ve $y = a_2 + t u_2\}$ şeklindedir.

İspat: TEKLİK: $\vec{u} = (u_1, u_2) = \overrightarrow{OP}$ vektörüne paralel

her doğru $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusuna da paraleldir. Eğer

$A \in \overleftrightarrow{OP}$ ise sözkonusu doğru ile $\overleftrightarrow{OP}$ çakışır, çünkü

bu paralel doğrular A'dan geçmektedir. Farklı iki nokta

bir doğruyu TEK türlü belirlediğinden sözkonusu doğru TEK'tir.

$A \notin \overleftrightarrow{OP}$ ise bir doğruya paralel olan ve dışındaki bir noktadan geçen TEK doğru olduğundan yine sözkonusu doğru TEK'dir.

VARLIK: $d = \{ N \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AN} \parallel \vec{u} \}$ kümesi $\vec{u}$'ya paralel ve A'dan geçen bir doğrudur, şimdi bunu gösterelim.

$N=(x,y) \in d \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AN} = t\vec{u}$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: (x-a_1, y-a_2) = (tu_1, tu_2)$

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: \quad x = a_1 + tu_1$ ve $y = a_2 + tu_2$

Yani, $d = \{ (x,y) \mid \exists t \in \mathbb{R}: x = a_1 + tu_1$ ve $y = a_2 + tu_2 \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a_1 + tu_1, \ y = a_2 + tu_2 \}$ olur.

$A \in d$, çünkü $t=0$ için $(x,y) = (a_1, a_2)$'dir.

d'nin doğru olduğunu görmek için d'nin $ax+by+c=0$ gibi bir denklemi olduğunu göstermek gerekir.

$(x,y) \in d \Rightarrow x = a_1 + tu_1$ ve $y = a_2 + tu_2$ olacak $t \in \mathbb{R}$ var.

t'yi yok etmek için x'i u_2 ile y'yi $-u_1$ ile çarpıp bu ifadeleri toplarsak $u_2x - u_1y = u_2a_1 + u_2tu_1 - u_1a_2 - u_1tu_2 \Rightarrow$

$u_2x - u_1y = u_2a_1 - u_1a_2 \Rightarrow \underset{a}{u_2}\, x + \underset{b}{(-u_1)}\, y + \underbrace{(u_1a_2 - u_2a_1)}_{c} = 0$

Demek ki, $d \subseteq \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0 \}$'dir.

Tersine, $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ ise

$$u_2 x - u_1 y = u_2 a_1 - u_1 a_2 \Rightarrow \boxed{u_2(x-a_1) = u_1(y-a_2)} \quad (*)$$

$u_1 = 0$ ise $u_2 \neq 0$ ve $x = a_1$'dir. $t = \dfrac{y-a_2}{u_2} \in \mathbb{R}$ için

$x = a_1 + tu_1$ ve $y = a_2 + tu_2$ olur.

$u_1 \neq 0$ ise $t = \dfrac{x-a_1}{u_1} \in \mathbb{R}$ seçersek $x - a_1 = tu_1$ olur.

$(*)$'dan $y - a_2 = tu_2$ olur. Yani, $x = a_1 + tu_1$ ve $y = a_2 + tu_2$ olur.

Demek ki, $d = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid ax+by+c=0\}$ doğrusudur.

$a = u_2$ $b = -u_1$ olduğu için $\underbrace{u_1 = 0}_{\overleftrightarrow{OP}\text{'nin eğimi } \infty} \Leftrightarrow \underbrace{b = 0}_{d\text{'nin eğimi } \infty}$

$u_1 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$'dır. $\overleftrightarrow{OP}$'nin eğimi $\dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{a}{b} = d$'nin eğimi

olduğundan, $d \parallel \overleftrightarrow{OP}$ yani $d \parallel \vec{u}$ olur.

Tanım: Önerme'nin ispatındaki
$$x = a_1 + tu_1$$
$$y = a_2 + tu_2$$

ifadesine d'nin parametrik denklemi, $ax+by+c=0$ ifadesine de kapalı denklemi denir. Bu denklemlerin birinden diğeri ispattaki gibi elde edilebilir.

Ör: $2x+3y-7=0$ doğrusunun parametrik denklemi?

$$2(x-1)+3(y-5/3)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)=-3(y-5/3)=t$$

$\Leftrightarrow$ $x=1+\frac{1}{2}t$ ve $y=5/3-\frac{1}{3}t$ elde edilir.

$d=\{(1+1/2\,t,\ 5/3-1/3\,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ olur. $\vec{v}=(1/2,-1/3)$

$\vec{u}=-6\vec{v}=(-3,\ 2)=(b,a)$

2. yol: $2x+3y-7=0 \Leftrightarrow y=\frac{-2x+7}{3}$

$d=\{(t,-2/3\,t+7/3)\mid t\in\mathbb{R}\}$'nin parametrik denklemi:

$$\left.\begin{aligned} x&=t\\ y&=7/3-2/3\,t\end{aligned}\right\}$$ şeklinde bulunur.

Uyarı: Parametrik denklem $\mathbb{R}$ ile d arasında 1-1, örten bir fonksiyon tanımlar.

Örnekteki doğru için bu fonksiyon $\varphi_1:\mathbb{R}\longrightarrow d$

$\varphi_1(t)=(t,-2/3\,t+7/3)$ veya $\varphi_2:\mathbb{R}\longrightarrow d$

$\varphi_2(s)=(1+1/2\,s,\ 5/3-1/3\,s)$ şeklinde verilebilir.

Bu fonksiyonlar sayesinde $\mathbb{R}$ sayı doğrusunu $\mathbb{R}^2$ düzlemine "gömeriz". Her φ'ye veya $\varphi(\mathbb{R})=d$'ye de $\mathbb{R}$'nin bir gömülüşü (embedding) denir.

$\varphi_1(\mathbb{R}) = d = \varphi_2(\mathbb{R})$ olmasına karşın $P \in d$ noktası aynı reel sayının görüntüsü değildir.

$\varphi_1(t) = P = \varphi_2(s) \iff t = 1 + \frac{1}{2}s$'dir, çünkü bu durumda $-\frac{2}{3}t + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2}s) + \frac{7}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}s$'dir.

Örneğin, $\varphi_1(t) = (0, \frac{7}{3}) = \varphi_2(s)$ olacak $t = 0$, $s = -2$!

Tersine, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (a_1 + tu_1, a_2 + tu_2)$, $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ise $\varphi(\mathbb{R}) = d$ $\vec{u} = (u_1, u_2)$'ye paralel ve $A = (a_1, a_2)$'den geçen bir doğrudur. Bu doğrunun parametrik denklemi

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \end{aligned}\right\}$$

şeklinde verilir.

Kapalı denklem bulmak için t'yi yok ederiz:

$$\begin{aligned} u_2 x &= u_2 a_1 + t u_1 u_2 \\ + \quad -u_1 y &= -u_1 a_2 - t u_1 u_2 \\ \hline u_2 x - u_1 y &= u_2 a_1 - u_1 a_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 x - u_1 y + u_1 a_2 - u_2 a_1 = 0}$$

Ör: d'nin parametrik denklemi $x = 3+\sqrt{2}\,t$, $y = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3}t$ ise

kapalı denklemini bulalım.

t'yi yok etmeliyiz. x'i $7/3$ ile y'yi $-\sqrt{2}$ ile çarpalım:

$\frac{7}{3}x = 7 + \frac{7\sqrt{2}}{3}t$ ve $-\sqrt{2}\,y = \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{7\sqrt{2}}{3}t$ olur.

$$\frac{7}{3}x - \sqrt{2}\,y = 7 + \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \underbrace{35x - 15\sqrt{2}\,y - (105 + 6\sqrt{2}) = 0}_{\text{Kapalı denklem}}$$

2. yol: $$\frac{x-3}{\sqrt{2}} = t = \frac{3}{7}\left(y + \frac{2}{5}\right) \Rightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{7}\left(\frac{5y+2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 35(x-3) = 3\sqrt{2}\,(5y+2) \Rightarrow 35x - 15\sqrt{2}\,y - (105 + 6\sqrt{2}) = 0.$$

d'nin noktalarını $\mathbb{R}$ sayılar ile 1-1 eşleyelim

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow d, \quad \varphi(t) = \left(3 + \sqrt{2}\,t,\ -\tfrac{2}{5} + \tfrac{7}{3}t\right).$$

Bir vektöre dik olan ve bir noktadan geçen doğru:

$\vec{0} \neq \vec{u} = (a,b)$ ve $N_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verilsin.

$d = \{ N \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{N_0N} \perp \vec{u} \}$ kümesine yakından bakalım.

$N = (x,y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{N_0N} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{N_0N} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)a + (y-y_0)b = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0.$

Demek ki, d denklemi $ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$ olan bir doğrudur.

Bu doğru N_0 noktasını içermektedir, çünkü $N = N_0$ iken

$\overrightarrow{N_0N} = \vec{0}$ vektörü $\vec{u}$'ya diktir.

İddia: $\vec{v_1}$ ve $\vec{v_2}$ bir doğrunun doğrultu vektörleri

ise $\vec{u} \perp \vec{v_1} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v_2}$ 'dir.

İspat: $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$ olduğundan $\vec{v_1} = t\vec{v_2}$ olacak $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

vardır. $\vec{u} \perp \vec{v_1} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0 \Leftrightarrow t(\vec{u} \cdot \vec{v_2}) = 0$

$\overset{t \neq 0}{\Leftrightarrow} \vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v_2}.$

Tanım: d bir doğru, $\vec{u} \neq \vec{0}$ bir vektör olsun. Eğer $\vec{u}$, d'nin bir (dolayısıyla her) doğrultu vektörüne dik ise d'ye diktir denir ve $\vec{u} \perp d$ ile gösterilir.

Teorem: $\vec{0} \neq \vec{u} = (a,b)$'ya dik ve $N_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$'den geçen TEK doğru $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by - (ax_0 + by_0) = 0\}$'dır.

İspat: $N \in d$ ise $\overrightarrow{N_0N} \perp \vec{u}$ olduğunu görmüştük. Bu yüzden d, $\vec{u}$'ya dik ve N_0'dan geçen bir doğrudur.

$d' \perp \vec{u}$ ve $N_0 \in d'$ ise d''nün doğrultu vektörleri $\vec{u}$'ya diktir.

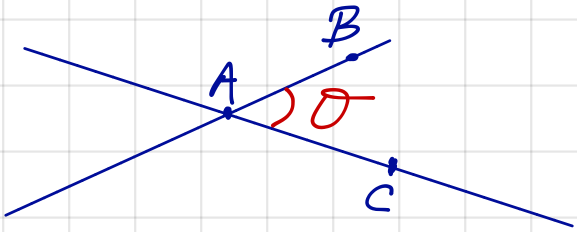
$\vec{v} = (x,y)$ herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff ax + by = 0 .$$

Yani, $\vec{u}$'ya dik vektörlerin uç noktaları orijinden geçen $ax + by = 0$ doğrusu üzerinde bulunurlar. Bu yüzden hepsi paraleldir. Dolayısıyla $d \parallel d'$ olur.

Ancak $N_0 \in d \cap d'$ olduğundan $d = d'$ olur. $\square$

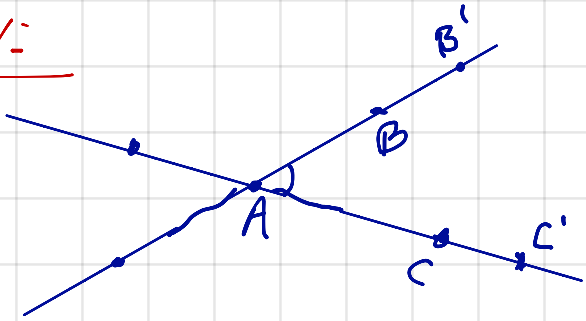
İki doğru arasındaki açı:



$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\|} = \cos\theta$$

olan $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$'ya $\overleftrightarrow{AB}$ ve $\overleftrightarrow{AC}$ doğruları arasındaki açı denir.

Ödev:

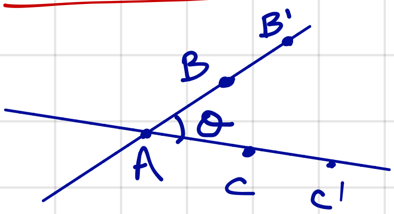


$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}}{\|\overrightarrow{AB'}\| \, \|\overrightarrow{AC'}\|}$$

olduğunu gösteriniz.

Ödev: d_1 ve d_2, denklemleri $y = m_1 x + n_1$ ve $y = m_2 x + n_2$ olan iki doğru olsun. m_1 ve m_2 0 olmasın. Bu durumda $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğunu gösteriniz.

Ödevin Çözümü: $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}}{\|\overrightarrow{AB'}\| \cdot \|\overrightarrow{AC'}\|}$ old. göst.



İspat: $\overrightarrow{AB'} = t\overrightarrow{AB}$ olacak şekilde $t>0$ vardır.

$\overrightarrow{AC'} = s\overrightarrow{AC}$ // $s>0$ vardır.

$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'} = ts \, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 'dir.

$\|\overrightarrow{AB'}\| = t\|\overrightarrow{AB}\|$ ve $\|\overrightarrow{AC'}\| = s\|\overrightarrow{AC}\|$ olduğundan

istenen elde edilir.

Ödevin Çözümü $d_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a_i x + b_i y + c_i = 0\}$, $i=1,2$

iki doğru olsun. Her $i=1,2$ için $a_i \neq 0 \neq b_i$ ve $m_i = -a_i/b_i$

olsun. $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$ 'dir, gösteriniz.

Kanıt: Her $i=1,2$ için $\vec{u_i} = (a_i, b_i)$ ve $\vec{v_i}$, d_i'nin

doğrultu vektörü ise $\vec{u_i} \perp d_i$ olduğundan $\vec{u_i} \perp \vec{v_i}$

olur.

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \vec{u_1} \perp \vec{u_2}$

$\Leftrightarrow \vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 = -b_1 b_2$

$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$.