Bir vektöre dik, bir noktadan geçen doğru:

$\vec{0} \neq \vec{u} = (a,b)$ ve $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ verilsin.

$d = \{ N = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AN} \perp \vec{u} \}$ kümesine yakından bakalım:

$$N \in d \iff \overrightarrow{AN} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{AN} \cdot \vec{u} = 0 \iff a(x-a_1) + b(y-a_2) = 0$$
$$\iff ax + by + (-aa_1 - ba_2) = 0.$$
$$\iff N \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + (-aa_1 - ba_2) = 0\}.$$

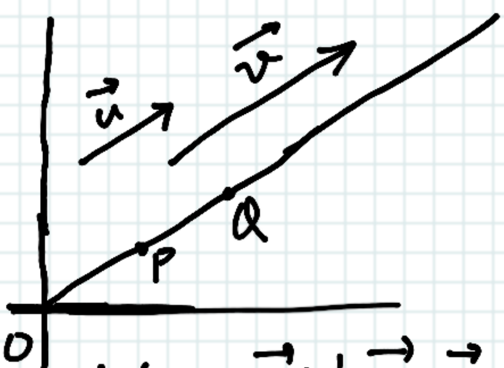
Demek ki d, denklemi $ax + by + (-aa_1 - ba_2) = 0$ olan bir doğrudur.

Ör: $\vec{u} = (1,-2)$ $A = (-3,4)$ olsun. $d = \{ N \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AN} \perp \vec{u} \}$ doğrusunun kapalı denklemini bulunuz.

$N = (x,y)$ dersek, $\overrightarrow{AN} \perp \vec{u} \iff (x+3, y-4) \cdot (1,-2) = 0$
$$\iff x + 3 - 2y + 8 = 0$$
$$\iff \boxed{x - 2y + 11 = 0}$$

Doğrusal (Lineer) Bağımlılık:

$\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ ve $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ sıfırdan farklı iki vektör olsun.



$\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{v} = t\vec{u}$
$\iff$ O, P ve Q doğrudaş

olduğunu görmüştük. Bu durumda, $\vec{v} - t\vec{u} = \vec{0}$ olur. Tersine $(a,b) \neq (0,0)$ için $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ ise $\vec{v} = \left(-\frac{a}{b}\right)\vec{u}$, $b \neq 0$, veya $\vec{u} = \left(-\frac{b}{a}\right)\vec{v}$, $a \neq 0$.

Yani, P ve Q'nun orijinden geçen bir doğru üzerinde bulunması için gerek ve yeter şart $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ olacak $(a,b) \neq (0,0)$ ikilisinin varlığıdır.

Tanım: $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ olacak $(a,b) \neq (0,0)$ varsa $\vec{u}$ ve $\vec{v}$'ye doğrusal bağımlı, eşitlik sadece $(a,b) = (0,0)$ için sağlanırsa doğrusal bağımsız denir.

Ör: $\vec{0}$ ile her vektör doğrusal bağımlıdır, çünkü
$1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{u}=\vec{0}$ eşitliği $(1,0)\neq(0,0)$ için sağlanır.

Ör: $\vec{u}=(1,2)$ ile doğrusal bağımlı $\vec{v}=(x,y)=?$

Bir önceki örnekten $\vec{v}=(0,0)$ bunlardan biri. Diğerleri için $\exists t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \vec{v}=t\vec{u}=(t,2t)$ olur.

Dolayısıyla, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ doğrusal bağımlı $\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}:\ \vec{v}=(t,2t)$.

$\Rightarrow \{N\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{ON}$ ve $\vec{u}$ doğrusal bağımlı$\} = \{N\in\mathbb{R}^2 \mid \exists t\in\mathbb{R}: N=(t,2t)\}$.

Ör: $\vec{u}=(1,2)$ $\vec{v}=(3,y)$ doğrusal bağımsız $\Leftrightarrow y=?$

$$a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow (a,2a)+(3b,yb)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} a+3b=0 \\ 2a+yb=0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} a+3b=0 \\ 0+(y-6)b=0 \end{array} \underset{(y\neq 6)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} a+3b=0 \\ b=0 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \text{tek çözüm.}$$

$y=6$ iken $\begin{array}{l} a+3b=0 \\ (y-6)b=0 \end{array}$ sisteminin bir ortak çözümü $(a,b)=(3,-1)$ olduğundan $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ doğrusal bağımlıdır.

Sorunun cevabı $y\neq 6$ 'dır.

Not: Bu tip sorular bizi $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{array}\right\}$ tipinde doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini bulmaya yöneltir. Bunların sistematik çözümleri Doğrusal Cebir derslerinde ele alınmaktadır. Biz burada özel bir durum için Kramer Kuralını ispatını bu derslere havale ederek vereceğiz.

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}} \iff x_1(a_{11},a_{21}) + x_2(a_{12},a_{22}) = (b_1,b_2)$$

doğrusal denk. sistemi

$$\iff x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21}\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2\end{bmatrix}$$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2\end{bmatrix}}_{B} \rightarrow \text{matris denklemi}$$

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ reel sayısına A matrisinin determinantı denir.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22}\end{vmatrix}$ ve $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2\end{vmatrix}$ olsun.

<u>Kramer kuralı:</u> $AX = B$'nin tek çözümü $X = (x_1, x_2)$'dir $\iff$ $|A| \neq 0$ ve $x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|}$'dır.

<u>Ör:</u> $A = (1,2)$ $B = (3,4)$ ve $C = (5,6)$ verilsin. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ doğrusal bağımlı olacak şekilde $D \in \mathbb{R}^2$'leri bulunuz.

$D = (x,y)$ olsun. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ doğrusal bağımsız $\iff a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD} = \vec{0}$ eşitliğini sağlayan tek ikili $(a,b) = (0,0)$'dır. Bu eşitlik, $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2)$ $\overrightarrow{CD} = D - C = (x-5, y-6)$ olduğundan

$$a(2,2) + b(x-5, y-6) = (0,0) \iff \left.\begin{aligned} 2a + (x-5)b &= 0 \\ 2a + (y-6)b &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sistemini verir.}$$

Bu sistemin tek çözümü $(a,b) = (0,0)$'dır $\underset{\text{Kramer kuralı}}{\iff} \begin{vmatrix} 2 & x-5 \\ 2 & y-6\end{vmatrix} \neq 0$.

$\iff 2(y-6) - 2(x-5) \neq 0 \iff y \neq x+1$.

Böylece, vektörler doğrusal bağımsız $\iff D \notin d := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$ ya da vektörler doğrusal bağımlı $\iff D \in d$.

Tanım: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ olsun.

aynı determinantı 3. sütuna göre açarsak

$$= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$ olur.

Ödev: $A=(2,3)$ $B=(4,5)$ olsun. $(x,y) \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ olduğunu gösteriniz.

İpucu: Sağdaki determinant bir doğru denklemi verir, öyle ki A ve B bu denklemi sağlar.

Örnek: Doğrudaş olmayan 3 noktadan TEK çember geçer.

$Ç = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ olsun.

$N_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i=1,2,3$, noktaları $Ç$'nin elemanıdır $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} ax_1+by_1+c &= -(x_1^2+y_1^2) \\ ax_2+by_2+c &= -(x_2^2+y_2^2) \\ ax_3+by_3+c &= -(x_3^2+y_3^2) \end{aligned}\right\} \text{ sisteminin çözümü vardır.}$$

Bu sistem $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1^2+y_1^2 \\ x_2^2+y_2^2 \\ x_3^2+y_3^2 \end{bmatrix}$ matris denk. verir.

Noktalar doğrudaş olmadığından $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$'dır.

Kramer kuralı $\Rightarrow$ matris denklemin TEK çözümü var.

Bu tek çözüm olan a,b,c'nin tanımladığı $Ç$ çemberi sözkonusu olan TEK çemberdir.