Elips:

Tanım: Sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan (bütün) noktaların kümesine elips denir.

Şimdi elipsin bir denklemini bulalım. $c>0$ olsun. Sabit iki noktayı $F_1=(-c,0)$ ve $F_2=(c,0)$ şeklinde alalım. Bu iki noktaya elipsin odak noktaları denir. $a>0$ olsun.

$$E_a=\{N\in\mathbb{R}^2 \,/\, u(N,F_1)+u(N,F_2)=\overset{\text{sabit}}{2a}\} \text{ olsun.}$$

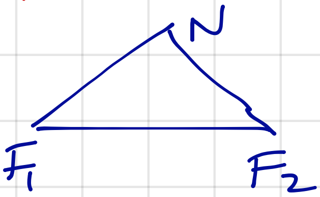
1. durum: $c>a$ ise $E_a=\emptyset$: $N\in\mathbb{R}^2$ için

$N\in\overleftrightarrow{F_1F_2}$ veya $N\notin\overleftrightarrow{F_1F_2}$'dir.

$N\in\overleftrightarrow{F_1F_2}$ ise $\underbrace{N=F_1,F_2 \text{ veya } F_1*N*F_2}_{u(N,F_1)+u(N,F_2)=2c>2a}$, ya da

$\underbrace{N*F_1*F_2 \text{ veya } F_1*F_2*N}$'dir.

$$u(N,F_1)+u(N,F_2)>2c>2a$$

$N\notin\overleftrightarrow{F_1F_2}$ ise  üçgen eşitsizliğinden

$$u(N,F_1)+u(N,F_2)>u(F_1,F_2)=2c>2a.$$

Her iki durumda da $u(N,F_1)+u(N,F_2)=2a$ olan $N\in\mathbb{R}^2$ YOK.

2) $c=a$ ise $E_a = E_c = F_1F_2$ doğru parçası olur.

Bir önceki durumda $N \in F_1F_2$ iken $u(N,F_1)+u(N,F_2)=2c$

$N \in \overleftrightarrow{F_1F_2} \setminus F_1F_2$ iken $u(N,F_1)+u(N,F_2) > 2c$ ve son

olarak $N \notin \overleftrightarrow{F_1F_2}$ iken $u(N,F_1)+u(N,F_2) > 2c$ olmuştu.

Dolayısıyla $c=a$ iken sadece $N \in F_1F_2$ için

$u(N,F_1)+u(N,F_2)=2a$ sağlanır.

3) $0<c<a$ ise $E_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$

burada $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 'dir.

$$N=(x,y) \in E_a \iff u(N,F_1)+u(N,F_2)=2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\iff \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\alpha} = \underbrace{2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\beta}$$

$$\overset{1}{\implies} (x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\iff \underbrace{(x+c)^2-(x-c)^2}_{4xc}-4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\iff \underbrace{xc-a^2}_{\gamma} = \underbrace{-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\delta}$$

$$\overset{2}{\implies} x^2c^2-2xca^2+a^4 = a^2[x^2-2xc+c^2+y^2]$$

$$\iff a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 \iff \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$b^2=a^2-c^2$

① ve ②'nin tersi de doğrudur, çünkü:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $0<c<a$ ve $b^2=a^2-c^2$ iken

$-a\leq x\leq a \Rightarrow xc\leq ac<a^2 \Rightarrow \gamma = xc-a^2<0$,

$(x-c)^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2\leq a^2+2ac+\underbrace{c^2+b^2}_{a^2}<4a^2$ olduğundan

$(x-c)^2+y^2<4a^2$ veya $0<\sqrt{(x-c)^2+y^2}<2a$'dır. Yani $\beta>0$'dır.

$\alpha>0$ ve $\delta<0$ olduğu açık olduğundan,

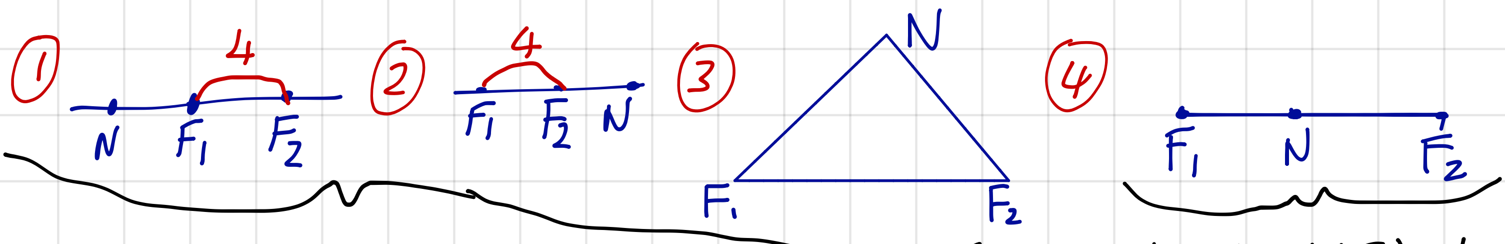
$\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ ve $\gamma^2=\delta^2 \Rightarrow \gamma=\delta$ olur.

① 'in tersi ② 'nin tersi

Böylece, $E_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$ olduğu görülür.

Ör: $F_1=(-2,0)$ $F_2=(2,0)$ noktalarına uzaklıkları toplamı a) 2 b) 4 c) 6 olan noktalar kümesi $E=?$

Çözüm: Genel olarak $N=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ noktası için şu dört durum söz konusudur:



$u(N,F_1)+u(N,F_2)>4$

$u(F_1,N)+u(N,F_2)=4$

a) $u(N,F_1)+u(N,F_2)\geq 4$ olduğu için $u(N,F_1)+u(N,F_2)=2$ olan $N\in\mathbb{R}^2$ olamaz. Yani $E=\emptyset$ olur.

b) Sadece F_1F_2 doğru parçası üzerindeki noktalar için $u(N,F_1)+u(N,F_2)=4$ olduğundan $E=F_1F_2$ doğru parçasıdır.

c) $u(N,F_1)=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ $\quad u(N,F_2)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ olduğundan

$$(x,y)\in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

1

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=36-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}+(x-2)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4-36-x^2+4x-4=-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{2x-9}}_{\gamma=}=\underbrace{\boxed{-3\sqrt{(x-2)^2+y^2}}}_{\delta=} \overset{2}{\Leftrightarrow} 4x^2-36x+81=9(x^2-4x+4+y^2)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+9y^2=45 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}$$ E'nin denklemi

1 ve 2'nin açıklaması:

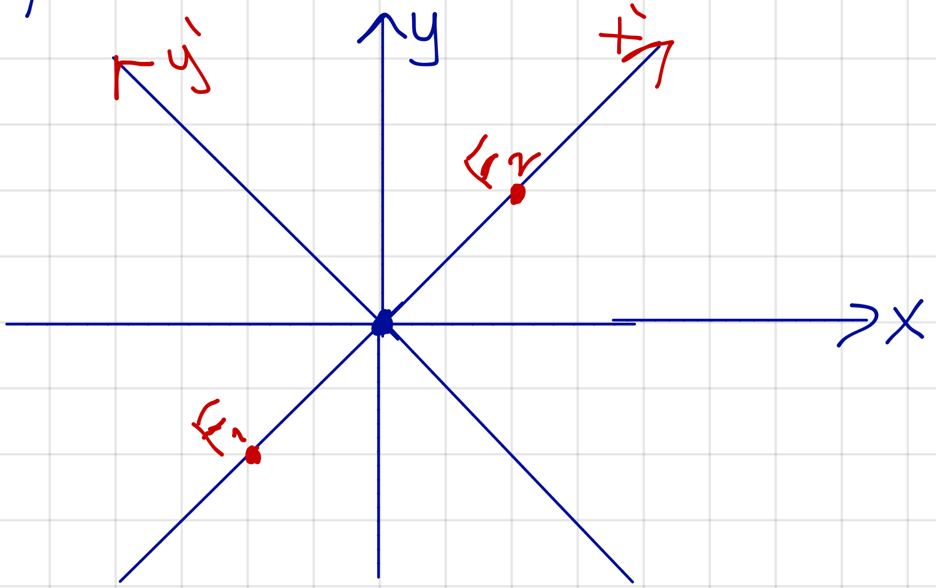
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow$ $-3\leq x\leq 3$ ve $-\sqrt{5}\leq y\leq\sqrt{5}$ olur.

$-5\leq x-2\leq 1$ olduğundan $(x-2)^2\leq 25$'dir. $y^2\leq 5$ olduğundan $\beta=\boxed{6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}}\geq 6-\sqrt{30}>0$ olur.

Böylece, 1'in tersinde $\alpha=\sqrt{(x+2)^2+y^2}>0$ olduğu için $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ elde edilir.

2'de ise $\delta<0$ ve $\gamma=2x-9\leq -3<0$ olduğundan $\delta^2=\gamma^2 \Rightarrow \delta=\gamma$.

Ör: $F_1=(-2,-2)$ ve $F_2=(2,2)$ noktalarına uzaklıkları toplamı 6 olan noktaların kümesi $E=?$



$\overleftrightarrow{F_1F_2}$ doğrusunun denklemi $y=x$ olarak bulunur.

F_1F_2 doğru parçasının orta noktası olan orijinden geçen $y=x$'e dik olan doğru $y=-x$'dir.

$y=x$ doğrusunu x' ekseni, $y=-x$ doğrusunu y' ekseni yapan afin dönüşüm
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a(x+y) \\ y' &= b(x-y) \end{aligned}}$$
şeklinde $a,b\in\mathbb{R}$ sayıları ile verilebilir.

Hatırlatma: $T(x,y)=(a_1x+b_1y+c_1,\ a_2x+b_2y+c_2)$ uzaklığı korur $\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2=1$, $a_1b_1+a_2b_2=0$ ve $b_1^2+b_2^2=1$'dir.

Uzaklığın korunması için $a^2+b^2=1$ ve $a^2-b^2=0$ olmalıdır.

Dolayısıyla $a^2=b^2$ ve $2a^2=1$'dir. $a,b\in\{\mp\sqrt{2}/2\}$.

F_1'in yeni koordinatları $(x',y')=(-2\sqrt{2},0)$ olduğundan

$a(x+y)=x' \iff a(-2-2)=-2\sqrt{2}$ formülünden $a=\sqrt{2}/2$'dir.

$(0,2)$ noktası $x'y'$-koordinat sisteminde 1. bölgede olduğu için x' ve y' koordinatları pozitiftir.

$b(x-y)=y' \iff b(0-2)=y'$ formülünden $b<0$ olduğundan $b=-\sqrt{2}/2$'dir.

Sonuç olarak, $x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ ve $y'=\frac{-\sqrt{2}}{2}(x-y)$ afin dönüşümü istenilen özelliklerdedir.

$F_1'=(-2\sqrt{2},0)$ ve $F_2'=(2\sqrt{2},0)$ odaklarına sahip elipsin denklemi $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{1}=1$ olduğundan bu elipsin xy-koordinat sistemindeki denklemi :

$$\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}(x-y)\right)^2=1 \iff \frac{1}{18}\left(x^2+2xy+y^2\right)+\frac{1}{2}\left(x^2-2xy+y^2\right)=1$$

$$\iff 10x^2-16xy+10y^2=18 \iff \boxed{5x^2-8xy+5y^2-9=0}$$

Grafik :