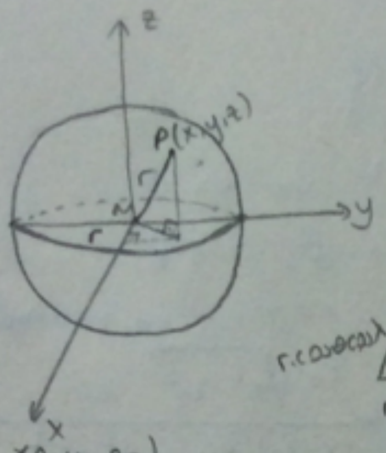
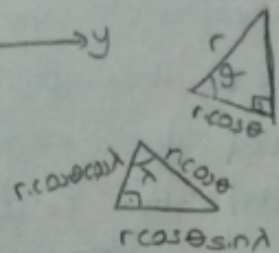
— Yüzeyler —

1. Küre : $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2}_{\text{kapalı denk.}} \} \rightarrow$ (x_0, y_0, z_0) noktasına uzaklığı r olan noktalar kümesi



$M = (x_0, y_0, z_0)$



P(x,y,z) için

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r.\cos\theta\cos\lambda \\ y &= r.\cos\theta\sin\lambda \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}} \; * \Rightarrow x^2+y^2+z^2=r^2$$

Merkezi $O=(0,0,0)$ olan kürenin parametrik denklemi:

Ötelene kullanılarak

$x' = x - x_0$

$y' = y - y_0$

$z' = z - z_0$

Merkezi $M = (x_0, y_0, z_0)$ olan parametrik denklemi

$$x = x_0 + \quad y = y_0 + \quad z = z_0 + \quad \boxed{*}$$

NOT: Denklem θ ve λ gibi 2 parametreye bağlı olduğu için yüzeydir.

ÖR: Merkezi $(1,0,-2)$, yarıçapı 3 olan S küresi ile

$\mathcal{D} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0 \} \quad S \cap \mathcal{D} = ?$

$(x,y,z) \in S \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$

$\qquad ax+by+cz+d=0$

$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ old. için $a \neq 0$ iken

$x = \dfrac{-by-cz-d}{a}$ olur.

$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$'da yerine koyunca

$$y^2 + (z+2)^2 = 9 - \left(\frac{-by-cz-d-a}{a} \right)^2 = \frac{9a^2 - (b^2y^2 + 2bcyz + c^2z^2 + 2b(d+a)y + 2c(d+a)z + (d+a}{a^2}$$

Düzlem ile Kürenin Kesişimi

(27) (2)

Verilen $\mathcal{D}$ düzlemini xy düzlemi kabul eden xyz koordinat sistemini seçerek $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$ kabul edilebilir.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\}$$

$(x,y,z) \in \mathcal{D} \cap S \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ ve $z=0$

$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 - z_0^2$ ve $z=0$

- $0<r<z_0$ iken $\mathcal{D} \cap S = \emptyset$
- $r=|z_0|$ iken $x=x_0, y=y_0, z=0 \Rightarrow \mathcal{D}\cap S = \{(x,y,z)\}$
- $r>|z_0|$ iken $r_0=\sqrt{r^2-z_0^2}$ için

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_0^2$
xy düzleminde $(x_0,y_0,0)$ yarıçapı r_0 olan çember

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

$(x,y,z)=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$ iken determinantta 2 satır aynı olacağından 0 dır.

Determinant $=0$ denklemi P_1, P_2, P_3'den geçen bir düzlem verir.

Doğrusal Yüzeyler

Tanım: $E=\alpha(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ bir eğri ve $\vec{e}(t)$ bir vektör ($\neq \vec{0}$) olmak üzere, $\alpha(t)$ noktasından geçen $\vec{e}(t)$'ye paralel olan doğruyu $L(t)$ ile gösterelim.

$\mathcal{Y} = \bigcup_{t\in A} L(t)$ kümesine doğrusal bir yüzey denir.

α'ya $\mathcal{Y}$'nin dayanak eğrisi, $\vec{e}$: doğrultman vektörü denir.

$L(t) = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\overrightarrow{\alpha(t)P} = s\,\vec{e}(t)}_{P=\alpha(t)+s\vec{e}(t)}$ olacak $s\in\mathbb{R}$ var$\}$

$\underbrace{P=\alpha(t)+s\vec{e}(t)}_{\text{Doğrunun parametrik denk. (parametre}=s)}$

$P\in\mathcal{Y} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: P \in L(t)$

$\Leftrightarrow \exists t,s \in \mathbb{R}: \underbrace{P=\alpha(t)+s\vec{e}(t)}_{\text{yüzeyin parametrik denk. (parametre}=s,t)}$

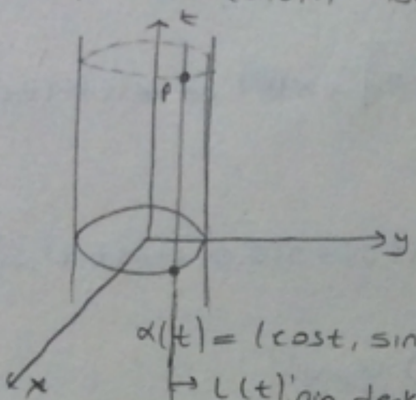
Tanım: Eğer $\vec{e}(t)$ sabit bir vektör ise yani $\vec{e}(t)=e_0$, $\forall t\in A$, ise Y'ye "silindir" denir.

Eğer $\vec{e}(t)=\overrightarrow{\alpha(t)H}$ olacak bir $H\in\mathbb{R}^3$ varsa Y'ye köşesi H olan bir "koni" denir.

Ör: $E=\{(\cos t, \sin t, 0) \mid t\in[0,2\pi)\}$

28

$\vec{e}(t)=(0,0,1)$ ise $Y=?$



$\alpha(t)=(\cos t, \sin t, 0)$

$\mapsto L(t)$'nin denklemi

$P=\alpha(t)+s\,e(t)=(\cos t, \sin t, 0)+s(0,0,1)=(\cos t, \sin t, s)$

Y'nin parametrik denk.

$x=\cos t$
$y=\sin t$
$z=s$

Y'nin kapalı denk.

$Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

ispat: $\underline{Y\subseteq Y'}$: $(x,y,z)\in Y$ ise $\left.\begin{array}{l}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=s\end{array}\right\}$ olacak $t,s\in\mathbb{R}$ var. $\left[\begin{array}{l}\text{Bu durumda}\\ x^2+y^2=1\\ \text{olur}\end{array}\right] \Rightarrow (x,y,z)\in Y'$

$\underline{Y'\subseteq Y}$: Tersine $(x,y,z)\in Y'$ olsun. Bu durumda $x^2+y^2=1$ olur. z üzerinde bir şart olmadığı için z her $s\in\mathbb{R}$ değerini olabilir. Yani $z=s$ olacak $s\in\mathbb{R}$ var

$x^2+y^2=1 \Rightarrow$ $\begin{array}{l}x=\cos t\\ y=\sin t\end{array}$ olacak bir $t\in[0,2\pi)$ vardır.

$x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=s$ olacak $t\in[0,2\pi)$ $s\in\mathbb{R}$ var $(x,y,z)\in Y$ olur.

Ör: $E = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} \text{ ve } z=0\} \rightarrow$ xy düzlemi elips

$\vec{e}(t) = (0,0,1)$ ise $Y = ?$

(29)

Y'nin parametrik denklemi:

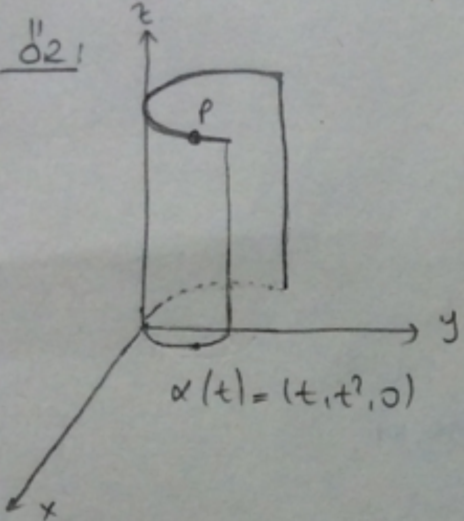
$x = 3\cos t$

$y = 4\sin t$

$z = s$

★ Çözümü bir önceki soruyla aynı kendin uğraş :)

Ör2:



$E = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ ve } z = 0\} = \alpha(\mathbb{R})$ ve $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$

$e(t) = (0,0,1)$ ise $Y = ?$

$P \in Y \Leftrightarrow P = \alpha(t) + s e(t) = (t, t^2, 0) + s(0,0,1) = (t, t^2, s)$

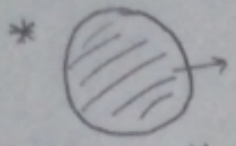
$Y = \{(t, t^2, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

$Y' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$ $\Big\rangle$ $Y = Y'$

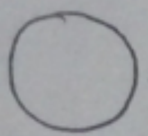
İspat: $Y \subseteq Y'$, çünkü $x = t$, $y = t^2 \Rightarrow y = x^2$ 'dir. $z = s$

$Y' \subseteq Y$, çünkü $(x,y,z) \in Y'$ verilince $t = x$ dersek $y = x^2 = t^2$ olur,

$s = z \in \mathbb{R}$ için de $z = s$ olur ki $x = t$, $y = t^2$, $z = s$ olacak t ve s reel sayılar, varlığını gösterir.

*  $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

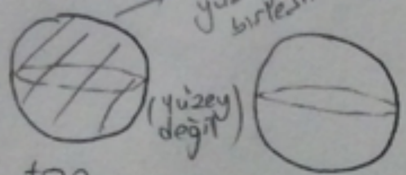
(eğri değil) $= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} x = s\cos t \\ y = s\sin t\end{matrix}$ olacak $s\in[0,1]$ ve $t\in[0,2\pi]$ var $\}$

 → Çember → $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} = \alpha(A)$

(eğri) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ $t\in A = [0,2\pi)$

30

sonsuz yüzeyin birleşimi



(yüzey değil)

top içi dolu

küre içi boş

→ $x = a\sin t$
$y = b\cos t$

① Yüzey: $B = [0,1]\times[0,2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$

(diyemesek bile eğri değil dememiz lazım)

ve

$\beta(s,t) = (s\cos t, s\sin t, 0)$

B üz sürekli ve 1-1

$\beta(B) = CD$

② Eğri:

③ Top; kürelerle parametrize edilir.
(içi dolu hali)

A-) $(0,1,0) = e(t)$
B-) $(0,0,1) = e(t)$ ve $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$

A-) $\alpha(t) + s(0,1,0) = (\cos t, s+\sin t, t)$

B-) $\alpha(t) + s(0,0,1) = (\cos t, \sin t, t+s)$

B) $S = \{(\cos t, \sin t, s) \mid t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

$y_B = \{(\cos t, \sin t, s+t) \mid t, s\in\mathbb{R}\}$ silindir. $x^2+y^2=1$.

$(x,y,z)\in S \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow x=\cos t,\ y=\sin t$ o.ş. $t\in\mathbb{R}$ var $\Rightarrow s = z-t\in\mathbb{R}$

$S = y_B$

$(x,y,z) \in \mathcal{Y}_A \rightarrow A$ şeklindeki yüzey

$$\left.\begin{array}{l} * \; x=\cos t \\ y=s+\sin t \\ z=t \end{array}\right\}$$ olacak $t,s\in\mathbb{R}$ var $\Rightarrow x=\cos z$

(31)

Yani, $(x,y,z)\in \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\cos z\} = S'$

Ödev: S' bir silindirdir, gösteriniz. (İpucu: $\mathcal{Y}_A$ bir silindir)

Taban eğrisi ?

Doğrultman vektörü?

$\mathcal{Y}_A \subseteq S'$ olur.

Soru: $S' \subseteq \mathcal{Y}_A$ midir? Yani S' ile $\mathcal{Y}_A$ eşit mi?

Mesela $(\cos\pi, 0, \pi) \in S'$ elemanı $\mathcal{Y}_A$ da mı?

$t=\pi$ $s=0$ için $(\cos t, s+\sin t, t) \in \mathcal{Y}_A$ olur.

$(0,4,\frac{\pi}{2}) \in S'$ çünkü $0=\cos\frac{\pi}{2}$

$(0,5,\frac{\pi}{2}) \in S$ " $s=4$ ve $t=\frac{\pi}{2}$ için $(0,5,\frac{\pi}{2})=(\cos t, s+\sin t, t)$

$(x,y,z \in S') \Rightarrow t=z\in\mathbb{R}$ ve $s=y-\sin t \in\mathbb{R}$ için

$x=\cos z=\cos t$ ve $y=s+\sin t$ olur.

Yani S' içindeki her (x,y,z) için $\begin{pmatrix} x=\cos t \\ y=s+\sin t \\ z=t\end{pmatrix}$ olacak t ve s

reel sayıları bulabiliriz.

$\Rightarrow (x,y,z) \in \mathcal{Y}_A$ sonuç $\mathcal{Y}_A = S'$.

NOT: Görüldüğü gibi düzlemsel olmayan E helisinin belirttiği S' silindiri düzlemsel olan $\alpha(t)=(\cos t, 0, t)$ eğrisinden de elde edilebilir. $[e(t)=(0,1,0)]$

Soru: Her silindir dayanak eğrisi düzlemsel olacak şekilde tanımlanabilir mi?

$x,y,z \in \mathcal{Y}_B \Rightarrow x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=s+t$ olacak şekilde $t,s\in\mathbb{R}$ vardır.

$\Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow \mathcal{Y}_B \subseteq S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

$(x,y,z)\in S \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow x=\cos t,\ y=\sin t$ olacak şekilde $t\in[0,2\pi)$ var

↳ taban eğrisi çember olan silindir.

$s=z-t\in\mathbb{R}$ için $z=s+t$ sağlanır. $(x,y,z)\in\mathcal{Y}_B$'den $\mathcal{Y}_B = S$.

Z

Soru: ① $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y) \text{ sürekli}\}$ bu bir silindir midir? doğrusal yüzey mi?

② $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$ doğrusal yüzey mi?

Cevap: ① $x,y,z\in Z \iff \begin{array}{l} x=t \\ y=s \\ z=f(t,s)\end{array}$ olacak $t,s\in\mathbb{R}$ vardır. (32)

$(t,s,f(t,s)) = \alpha(t)+s\vec{e}(t)$ olacak $\alpha(t)=?$ $e(t)=?$ $f(t,s)=g(t)+sh(t)$

$\Rightarrow \underbrace{(t,0,g(t))}_{\alpha(t)} + s\underbrace{(0,1,h(t))}_{\vec{e}(t)}$ $\rightarrow \alpha(t)$ noktasından geçen $\vec{e}(t)$'ye paralel doğru

Eğer $f(x,y)=g(x)+y.h(x)$ şeklindeyse veya $f(x,y)=g(y)+xh(y)$ ise Z doğrusal bir yüzeydir. Eğer $h(x)=$sabitse bu yüzey silindir olur.

$\Updownarrow$

$(x,y,z)\in\{\alpha(t)+s\vec{e}(t) \mid t,s\in\mathbb{R}\} \rightarrow$ doğrusal yüzey

Örn: $f(x,y)=x+y^2$ olsaydı?

$(x,y,x+y^2) = x\overbrace{(1,0,1)}^{\vec{e}} + \overbrace{(0,y,y^2)}^{\alpha(y)}$

$y=t$ $s=x$ dersek $(x,y,x+y^2)=\alpha(t)+s\vec{e}$ olur.

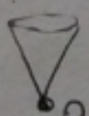
$Z=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x+y^2\}$ bir silindir olur.

Örn: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z\}$ ise

$(x,y,x^2+y^2) = x\underbrace{(1,0,x)}_{\alpha(y)} + y\underbrace{(0,1,y)}_{\text{veya } \alpha(x)}$

$y=t$ $x=s$

$f(x,y)=x^2+y^2$, ne x'de ne de y'de lineer değil.



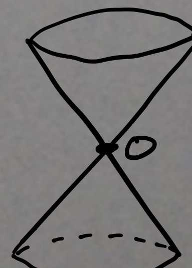
$(\sqrt{z}\cos\theta, \sqrt{z}\sin\theta, z)$

Bu yüzey doğrusal değil. Üzerinde hiç doğru yok:
$x=a_1t+b_1$
$y=a_2t+b_2$
$z=a_3t+b_3$
doğrusu için
$x^2+y^2=z \iff$
$(a_1^2+a_2^2)t^2+2(a_1b_1+a_2b_2)t+(b_1^2+b_2^2)=a_3t+b_3$
$\iff t=0$ ve $b_3\geq 0$
veya
$(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$
doğru vermez.
$\iff (x,y,z)=(b_1,b_2,b_3)$, ve $b_3\geq 0$'dır.

---

② $Z=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$. $(x,y,z)\in Z \Rightarrow$

$(z\cos\theta, z\sin\theta, z) = z\underbrace{(\cos\theta,\sin\theta,1)}_{\vec{e}_\theta}+(0,0,0)$



$= \underbrace{(z-1)}_{S}\underbrace{(\cos\theta,\sin\theta,1)}_{\vec{e}(\theta)} + \underbrace{(\cos\theta,\sin\theta,1)}_{\alpha(t)}$

KONİ ÖRNEKLERİ

Doğrusal yüzey olarak koni:

$H \in \mathbb{R}^3$, $\alpha : A \to \mathbb{R}^3$ eğri,
$\vec{e}(t) = \overrightarrow{\alpha(t)H}$ iken

$\{\alpha(t) + s\overrightarrow{\alpha(t)H} \mid t \in A, s \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\alpha(t)$'den geçen ve $\vec{e}(t)$'ye paralel olan doğruların oluşturduğu koni (doğrusal yüzey) idi.

$\alpha(t)$'den geçen ve $\overrightarrow{\alpha(t)H}$ vektörünü paralel olan doğru

$(s-1)(H-\alpha(t)) + (H-\alpha(t))$

$$\alpha(t) + s\overrightarrow{\alpha(t)H} = \alpha(t) + s(H-\alpha(t)) = H + (s-1)\overrightarrow{\alpha(t)H}$$ eşitliğinden

dolayı H'den geçen ve $\overrightarrow{\alpha(t)H}$'ye paralel olan doğrudur. Yani, bu doğru $\alpha(t)$ ve H'nin belirlediği doğrudur.

Demek ki, koni üzerindeki bütün doğrular H'den geçmek zorunda. Bu H'ye **koninin köşesi** denir.

Ör: $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$ koni mi?

Her $z=s$ için $x^2+y^2=s^2$ bir çember olup,

$$\left.\begin{array}{l} x = s\cos t \\ y = s\sin t \\ z = s \end{array}\right\}$$ şeklinde parametrize edilen noktalara sahiptir

$s=0$ için ilgili çember $H=(0,0,0)$ noktasıdır.

Yani, $(x,y,z) \in K \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0,2\pi)$:

$$(x,y,z) = (s\cos t, s\sin t, s) = \underset{\substack{\| \\ H}}{(0,0,0)} + s\underset{\substack{\| \\ \overrightarrow{\alpha(t)H}}}{(\cos t, \sin t, 1)}$$ dir

$\overrightarrow{\alpha(t)H} = H - \alpha(t) = -\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ olacak

$\alpha(t) = (-\cos t, -\sin t, -1)$ eğrisi bulunur. Yani, K üzerindeki her nokta orjinle bu eğrinin bir noktasından geçen doğru üzerindedir: $K \subseteq K' = \{(s\cos t, s\sin t, s) \mid s \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0,2\pi)\}$

Şimdi $K' \subseteq K$ old. gösterelim

$$\left.\begin{array}{l} x = s\cos t \\ y = s\sin t \\ z = s \end{array}\right\} \begin{array}{c} x^2+y^2=s^2 \\ z=s \end{array} \Rightarrow x^2+y^2=z^2\text{'dir.}$$

Demek ki, $K=K'$ ve K' koni old. için K'da bir konidir.

Ör: $\alpha(t)=(t,t^2,0)$ $\quad H=(0,0,1)$

$\overrightarrow{\alpha(t)H}=(0,0,1)-(t,t^2,0)=(-t,-t^2,1)$ (34)

$H+s\overrightarrow{\alpha(t)H}=(0,0,1)+s(-t,-t^2,1)=(-st,-st^2,1+s)$

$\alpha(t)+u\overrightarrow{\alpha(t)H}=(t,t^2,0)+u(-t,-t^2,1)=(t-ut,t^2-ut^2,u)$

$u=s+1$ iken iki nokta aynı ! $(-s=1-u)$

$K=\{(-st,-st^2,1+s)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$ köşesi H dayanak eğrisi bir parabol olan konidir.

Soru: $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\}$ olacak bir f fonk. var mı?

Çözüm arayışı: $\left.\begin{array}{l} x=-st \\ y=-st^2 \\ z=1+s \end{array}\right\}$ ifadesinde s ve t'yi yok edip x,y,z arasında bir ilişki kurmayı deneyelim

$x^2=s^2t^2=(-s)(-st^2)=(-s)\cdot y=(1-z)y$

$(x,y,z)\in K \Rightarrow (x,y,z)\in K'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+(z-1)y}_{f(x,y,z)}=0\}$

Yani, $K\subseteq K'$.

Kilit soru: $K'\subseteq K$?

Cevap: Hayır !

$(0,y,1)\in K'$, $\forall y\in\mathbb{R}$ için, çünkü $x^2+(z-1)y=0$

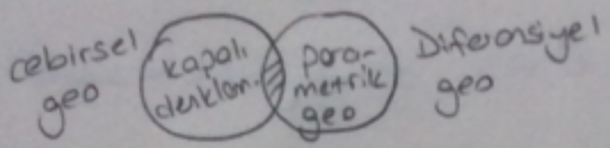
$\left.\begin{array}{l} x=-st=0 \\ y=-st^2=y \\ z=s+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow s=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}$

Yani, K' üzerindeki $d=\{(0,y,1)\mid y\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0 \text{ ve } z=1\}$ doğrusunun sadece $(0,0,1)$ noktası K üzerinde

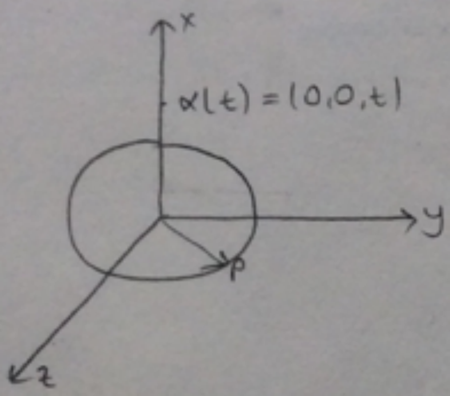
Dolayısıyla, $(0,1,1)\in K'$ ama $\notin K$

$\boxed{K\neq K'}$

NOT: Bu örnek, bize geometrik objeleri tanımlamanın iki yolu olan kapalı denklem(ler) ve parametrik denklem(ler) kullanmanın birbiriyle eşdeğer olmayabileceğini gösterir.



ÖR: Dayanak eğrisi z ekseni doğrultman vektörü $z=0$ (xy) düzlemindeki birim çember üzerindeki P noktaları için $\vec{OP}$ şeklinde olan doğrusal yüzey = ?



$P=(\cos t, \sin t, 0)$

$\vec{e}(t)=\vec{OP}=(\cos t, \sin t, 0)$ olur.

z-ekseni: $\alpha(t)=(0,0,t)$, $t\in\mathbb{R}$

$\alpha(t)+s\vec{e}(t)=(0,0,t)+s(\cos t, \sin t, 0)$

$=(s\cos t, s\sin t, t)$

$Y=\{(s\cos t, s\sin t, t) \mid t,s\in\mathbb{R}\}$ doğrusal bir yüzey kapalı denklemi = ?

$$\left.\begin{aligned} x&=s\cos t\\ y&=s\sin t\\ z&=t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{x\sin z - y\cos z}_{g(x,y,z)}=0 \rightarrow Y\subseteq Y_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$$

alternatif: $f(x,y,z)=x-y\cot z=0$

$Y_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}$

$Y_2=\{\quad \text{"} \quad \mid f(x,y,z)=0\}$

Soru: $Y=Y_1$ veya $Y=Y_2$ midir?

$z=0$ ve $\begin{aligned} x&=s\cos t\\ y&=s\sin t\\ z&=t\end{aligned}$ iken $\begin{aligned} x&=s\\ y&=0\\ z&=0\end{aligned}$ olur.

$Y\cap\{z=0 \text{ düzlemi}\}=\{x\text{- ekseni}\}\subseteq Y$

Fakat, $\cot(z)$, $z=0$ da tanımsız olduğu için x ekseni üzerindeki noktalar Y_2 kümesinde değildir.

Sonuç: $Y\neq Y_2$ dir

Aslında $Y_2 \subset Y$! $\left(\begin{aligned} t&=z\\ s&=\frac{y}{\sin z}\end{aligned}\right)$

$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\}$ olur. $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}$ mi?

$(x,y,z) \in \mathcal{Y}_1 \Rightarrow x\sin z = y\cos z \Rightarrow z = t$ olacak $t \in \mathbb{R}$ var.

$\Rightarrow x\sin t = y\cos t$

$\sin t \neq 0$: $s = \frac{y}{\sin t} \in \mathbb{R}$ için $x = \frac{y}{\sin t} \cdot \cos t = s\cos t$

$\cos t \neq 0$: $s = \frac{x}{\cos t} \in \mathbb{R}$ için $y = \frac{x}{\cos t} \cdot \sin t = s.\sin t$

Her iki durumda da $(x,y,z) \in \mathcal{Y}$ olur.

$\mathcal{Y}_1$ ve $\mathcal{Y}_2$ nin farkı $\sin t = 0$ iken f tanımsız $\mathcal{Y}_2$ üzerinde nokta yok

$\mathcal{Y}_1$ üzerinde $\sin t = 0$, $\cos t \neq 0$ olan noktalar var $z = t$, $y = 0$, $x = s\cos t$

$\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}$

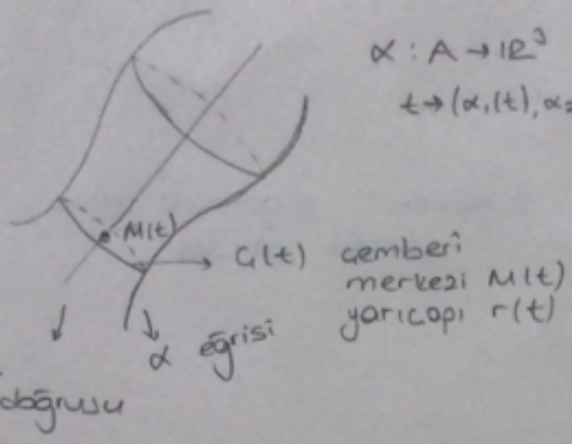
<u>Ör:</u> $\mathcal{Y} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ doğrusal yüzey mi?

$\mathcal{Y}' = \{(t,s,ts) \mid t,s \in \mathbb{R}\}$ dersek $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$ olur.

Çünkü $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = s \\ z = xy = ts \end{array}\right\}$ olur. Tersine $\begin{array}{l} x = t \\ y = s \\ z = ts \end{array} \Rightarrow z = xy$ olur.

$(t,s,ts) = \underbrace{(t,0,0)}_{\alpha(t)} + s\underbrace{(0,1,t)}_{\vec{z}(t)}$ old. için $\mathcal{Y}$ doğrusal yüzeydir.

- DÖNEL YÜZEYLER -



$\alpha : A \to \mathbb{R}^3$ eğri

$t \to (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$

* Aynı düzlemde bulunan, Bir eğrinin bir doğru etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeylere dönel yüzey denir

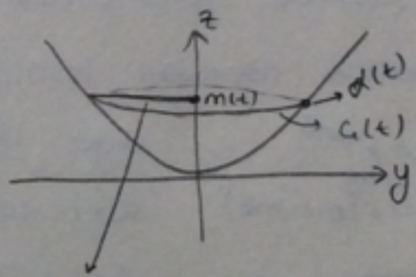
$$Y = \bigcup_{t \in A} C(t)$$

NOT: Eğri ile doğru aynı düzlemde bulunmazsa elde edilen obje "yüzey" olmayabilir. Mesela, eğri olarak xy - düzlemindeki birim çemberi doğru olarak z ekseni alırsak yine aynı çemberi elde ederiz. Bu bir eğridir. ∇

Ör: yz düzleminde $z = y^2$ parabolünü z ekseni etrafında döndürünce elde edilen yüzeyin

a) parametrik denk = ?

b) kapalı denk = ?



$\alpha(t) = (0, t, t^2)$

$m(t) = (0, 0, t^2)$ $\quad A = [0, \infty)$

$r(t) = t \geq 0$ (çünkü $t \in A$)

$r(t) = \alpha(t)$'nin y koordinatının mutlak değeri

* $C(t)$ parametrik denk.

$x - 0 = t.\cos\theta$

$y - 0 = t.\sin\theta$

$z - t^2 = 0$

* Y'nin parametrik denk.

$$\left.\begin{array}{l} x = t.\cos\theta \\ y = t.\sin\theta \\ z = t^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t \in A \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array}$$

* $(x, y, z) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t^2) \in Y$

* Kapalı denk

$x^2 + y^2 = t^2 = z$

$Y' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$

$Y \subseteq Y'$ olduğunu gösterir.

Tersi için $(x, y, z) \in Y'$ alalım

$z = x^2 + y^2 \geq 0$ olur.

$t = \sqrt{z} \in \mathbb{R}$ demek, $x^2 + y^2 = t^2$ olur.

Bunu $z = t$ düzlemindeki çember olarak düşünürsek

$$\left.\begin{array}{l} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{array}\right\} \text{olacak } \theta \in [0, 2\pi)$$

vardır.

ÖDEV: Aynı düzlemdeki iki doğrudan birini diğeri etrafında döndürünce

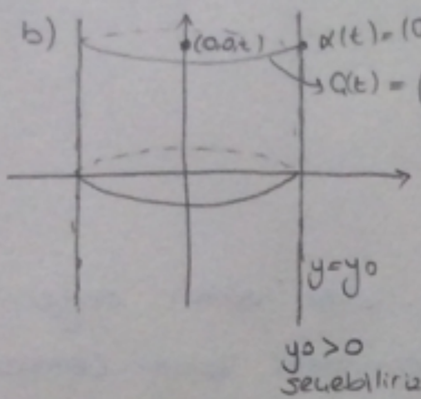
- doğrular kesişirse koni
- " parabolse silindir,

elde edileceğini gösteriniz.

(38)

İpucu: Düzlemi yz düzlemi; doğrulardan birini z ekseni diğerinide buna parolel alırsak;

b)

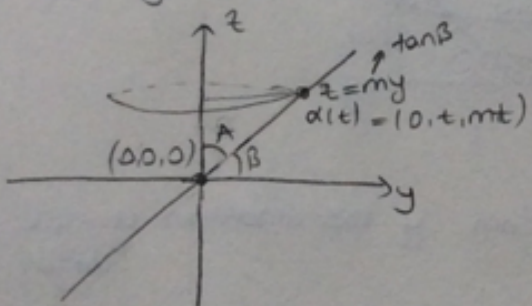


$x=y_0\cos\theta$
$y=y_0\sin\theta$
$z=t\in\mathbb{R}$

Yüzeyin parametrik denklemi silindirin parametrik denklemidir. Çünkü dayanak eğrisi $\beta(\theta)=(y_0\cos\theta, y_0\sin\theta, 0)$ xy düzleminde yarıçapı y_0 olan çember olan doğrultman vektörü $\vec{e}=(0,0,1)$ olan silindir

$\beta(\theta)+te$ şeklinde parametrize ediliyordu

a) Doğruların kesişim noktasını $(0,0,0)$ birini z ekseni alırsak



diğer doğruyu $z=my$ olarak alırsak,

$\alpha(t)=(0,t,mt)$ olur.

$C(t)$ ($z=mt$ düzleminde) olduğu için

$$\left.\begin{array}{l} x=t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \\ z=mt \end{array}\right\} \text{şeklinde par. edilir.}$$

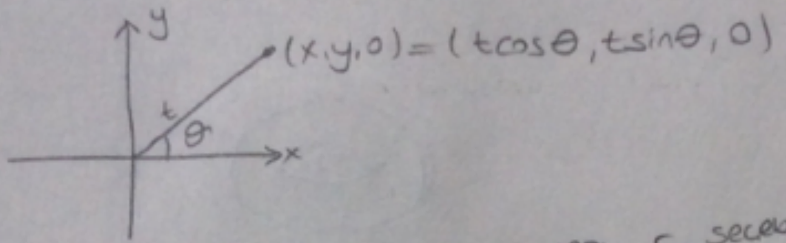
Dayanak eğrisi $z=m$ düzlemindeki çember alırsak $\beta(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,m)$
$H=(0,0,0)$ iken koninin par. denk. $\underbrace{(1-t)H+t\overrightarrow{H\beta(\theta)}}$ olur.

$t\beta(\theta)=(t\cos\theta, t\sin\theta, mt)$ olur.

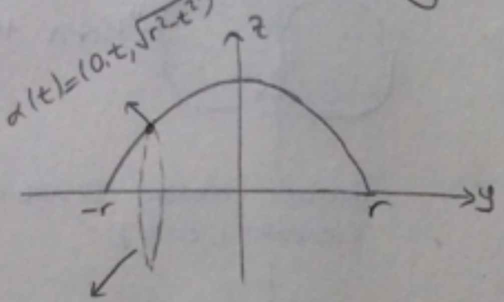
UYARI: $m=0$ iken yani y eksenini z ekseni etrafında döndürünce elde edilen koni xy- düzlemidir.

$$m=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \\ z=0 \end{array}\right\} \in \text{xy- düzlemi}$$

Soru: xy düzlemindeki her nokta bu şekilde mi?



Soru: Küre dönel yüzey mi? merkezi (0,0,0) yarıçapı r seçebiliriz.



C(t) çemberi $\alpha(t)$ eğrisinin y- ekseni etrafında dönerek elde edildiğinden

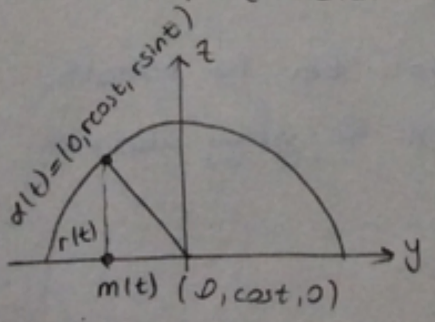
$m(t)=(0,t,0)$

$r(t)=\sqrt{r^2-t^2}$ olur.

C(t) çemberi $y=t$ düzleminde old. için

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2-t^2}\cos\theta \\ y &= t \\ z &= \sqrt{r^2-t^2}\sin\theta \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} -r \leq t \leq r \\ \text{ve} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ \text{için} \end{array}$$

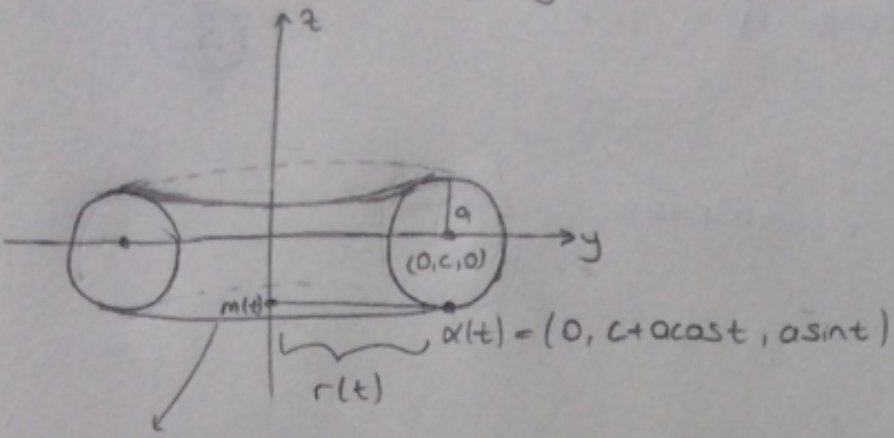
$x^2+z^2=r^2-t^2$ old. $x^2+z^2+t^2=\underbrace{x^2+z^2+y^2=r^2}_{\text{küre denk.}}$ olur



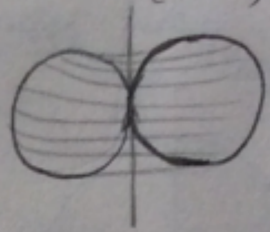
<u>C(t) çemberi:</u>

$$\left.\begin{aligned} x-0 &= r\sin t\cos\theta \\ y &= r\cos t \\ z-0 &= r\sin t\sin\theta \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{kürenin} \\ \text{par.} \\ \text{denk.} \end{array}$$

Soru: Simit dönel yüzey mi?

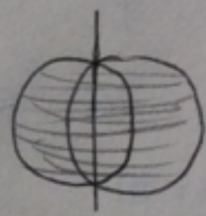


Çember eksene teğetse
(c=a)



("horn torus"

Çember ekseni 2 noktada
keserse (c<a)



"spindle
torus"

$C(t)$'nin merkezi: $(0,0,a\sin t)$

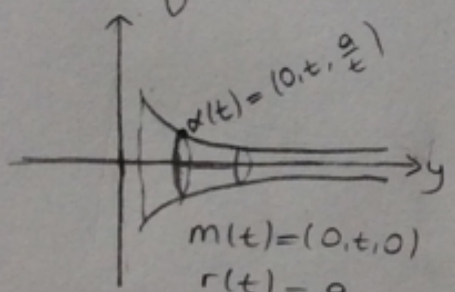
Dönel yüz. par:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (c+a\cos t)\cos\theta \\ y &= (c+a\cos t)\sin\theta \\ z &= a\sin t \end{aligned}}$$

simitin par. denk.

Ör: ("Gabriel's horn" ≡ Cebrail'in Sûru)

$z = \dfrac{a}{y}$, $y \geq 1$, $x=0$, eğrisini y ekseni etr. dönd.



$m(t) = (0,t,0)$
$r(t) = \dfrac{a}{t}$

$C(t)$'nin par. denk.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{t}\cdot\cos\theta \\ y &= t \\ z &= \frac{a}{t}\sin\theta \end{aligned}\right]$$

Sûr'un parametrik denk.
$t \in [1,\infty)$
$\theta \in [0,2\pi)$

İlginç şu: $a=1$ iken bu boruların içinin hacmi π yüzey alanı $=\infty$

Kuadrik Yüzeyler:

$q(x,y)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+2a_4xy+2a_5yz+2a_6xz+b_1x+b_2y+b_3z+c$ reel katsayılı 2. derece 2 değişkenli bir polinom olmak üzere

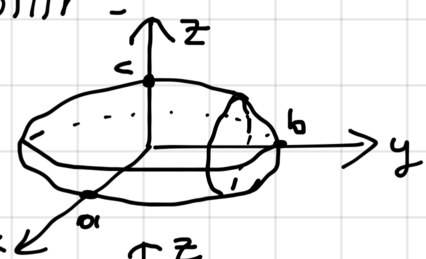
$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid q(x,y)=0\}$ kümesine bir kuadrik denir. $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\neq(0,0,0,0,0,0)$ olmak zorunda.

Not: Kuadrikler yüzey olmayabilir.

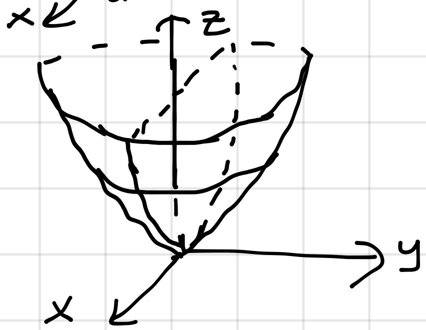
- $q(x,y)=x^2+y^2+z^2$ ise $K=\{(0,0,0)\}$ noktadır.
- $q(x,y)=x^2+y^2$ ise $K=\{(0,0,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ z-eksenidir.
- $q(x,y)=xy$ ise $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\}$ iki düzlemin birleşimidir.
- $q(x,y)=x^2+y^2+z^2+1$ ise $K=\emptyset$ olur.

Teorem: Boş olmayan her kuadrik $\mathbb{R}^3$'ün bir izometrisiyle aşağıdakilerden birine dönüştürülebilir:

1) Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

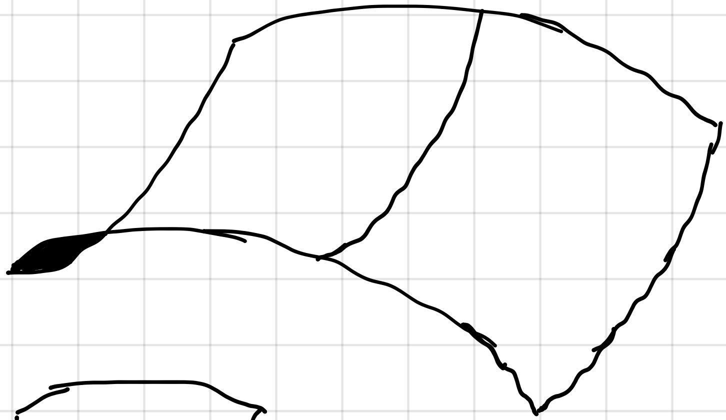


2) Eliptik Paraboloid: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



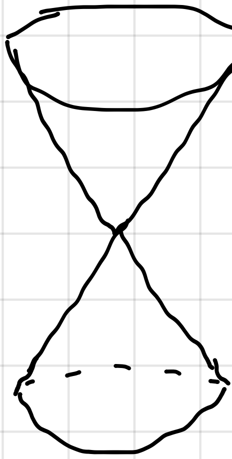
3) Hiperbolik Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



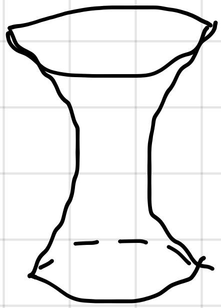
4) Kuadrik Koni:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



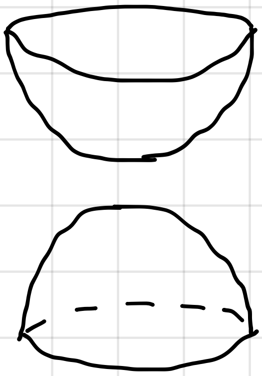
5) Bir parçalı hiperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



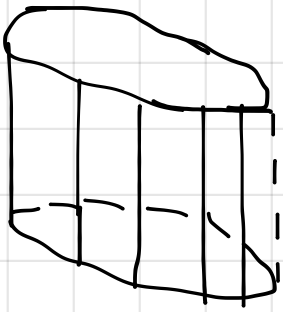
6) İki parçalı hiperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

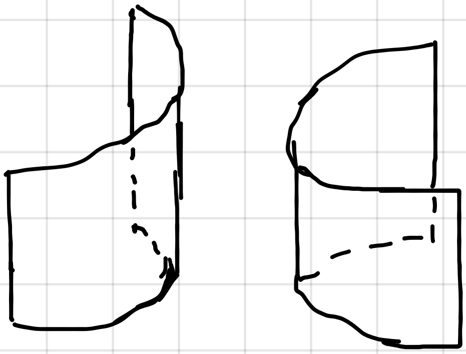


7) Eliptik Silindir:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

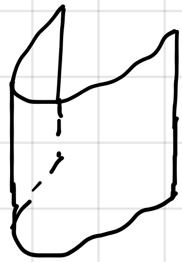


8) Hiperbolik Silindir:



9) Parabolik Silindir:

$$\frac{x^2}{a^2}=y$$



10) yz-düzlemi: $x^2=0$.

11) Paralel iki düzlem: $x^2=a^2$

12) Kesişen iki düzlem: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

13) Doğru (z-ekseni): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (Yani $x=y=0$).

14) Nokta: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (Yani, $x=y=z=0$).

<u>Ödev:</u> Yukarıda verilen kuadrik yüzeylerden hangileri doğrusal hangileri dönel yüzey bulunuz.

<u>Örnek:</u> Elipsoidin $b=c$ iken dönel yüzey olduğunu görelim.

Denklem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ olduğundan $x=d$ düzlemiyle kesişimi $|d|<a$ iken $y^2+z^2=b^2(1-\frac{d^2}{a^2})$ çemberi olur.

Bu çember, $Ç=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=d \text{ ve } y^2+z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-d^2)\}$ veya

$$\left.\begin{aligned} x&=d\\ y&=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-d^2}\cos t\\ z&=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-d^2}\sin t \end{aligned}\right\}$$

parametrik denklemiyle verilir.

$|d|=a$ iken $y=z=0$ olur ki kesişimin $(d,0,0)$ veya $(-d,0,0)$ noktası olması demektir. Bu noktalarda, $x=d$ düzlemi elipsoid'e teğettir.

$|d|>a$ iken $y^2+z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-d^2)<0$ denkleminin reel çözümü olmadığından kesişim $\emptyset$ olur.

Sonuç olarak, her $d\in\mathbb{R}$ için $x=d$ düzlemleri d değerleri arttıkça elipsoid ile kesişmezken önce $(-d,0,0)$ noktasında teğet olup sonra çemberler boyunca kesişmekte, $(d,0,0)$'da teğet olduktan sonra tekrar kesişmemektedirler.

Buradan, elipsoidin bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu elde edilen dönel yüzey olduğunu anlarız.

Bu eğri ile x-ekseni aynı düzlemde bulunacağı için, eğriyi bulmak için elipsoidi (mesela) xy-düzlemiyle ($z=0$?) kesiştiririz:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ve $z=0$ elipsi elde edilir. Son olarak, elipsin parametrik denklemi $\alpha(t)=(a\cos t, b\sin t, 0)$ olduğundan,

Sabit bir t için $\alpha(t)\in\mathbb{R}^3$ noktasının x-ekseni etrafında dönerken taradığı çember :

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=b\sin t\cos\theta\\ z&=b\sin t\sin\theta \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &t\in[0,2\pi)\\ &\theta\in[0,2\pi) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Dönel yüzey bu çemberlerin birleşimi olduğundan bu aynı zamanda elipsoidin bir parametrik denklemidir.

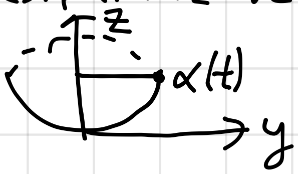
Örnek: Eliptik paraboloidin $a=b$ iken bir dönel yüzey olduğunu görelim. $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 'de $a=b \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=a^2z$ olur.

$z\geq 0$ old. için $t=\sqrt{z}$ iken $z=t^2$ olur. Bu durumda, eliptik paraboloidin $z=t^2$ düzlemiyle kesişimi $x^2+y^2=(at)^2$ çemberidir.

$t=0$ iken bu çemberin yarıçapı 0 olur ki $(0,0,0)$ noktasını verir.

Bu çemberlerin merkezleri $(0,0,t^2)$ olduğundan eliptik paraboloid bir eğrinin z-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir.

Eğriyi yz-düzleminde seçmek için eliptik paraboloidi $x=0$ düzlemiyle kesiştiririz ve $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=0 \text{ ve } z=\frac{y^2}{b^2}\right\}$ parabolünü buluruz.



Parabol üzerinde bir nokta: $\alpha(t)=(0,bt,t^2)$

Çemberin merkezi $(0,0,t^2)$ yarıçapı bt olduğundan, dönel yüzeyin parametrik denklemi:

$$\left.\begin{aligned} x&=bt\cos\theta \\ y&=bt\sin\theta \\ z&=t^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &t\in[0,\infty) \\ &\theta\in[0,2\pi) \end{aligned}$$

olur.