ANALİTİK GEOMETRİ 2

11 Şubat 2016
Perşembe
1. ders

2. Dereceden cebirsel Eğrilerin Sınıflandırılması

$$F(x,y) = [x \;\; y \;\; 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1\end{bmatrix} = X^t A X$$

$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{22}y + a_{33}$$

* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$ kümesine 2. dereceden bir cebirsel eğri denir.

$d = \{\underbrace{(2t+1,\, t)}_{\text{parametrik denklem}} \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x-1-2y=0}_{\text{kapalı denklem}}\}$

1. derece polinom

$\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$t \to (\underbrace{2t+1,\, t}_{\text{1. dereceden polinom}})$

$\alpha : \mathbb{R}\to\alpha(\mathbb{R}) = d$

1-1, örten (sürekli) bir fonks.

Doğrular 1. dereceden cebirsel eğriler!

Öteleme

$T(b_1,b_2)\,(x,y) = (x+b_1,\; y+b_2) = (x',y') \quad (x = x'-b_1,\; y = y'-b_2)$

Önerme: $T(-x_0, -y_0)$ ötelemesi ile yeni denklem

$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}'$ burada

$\boxed{a_{11}' = a_{11}}$, $\boxed{a_{12}' = a_{12}}$, $\boxed{a_{22}' = a_{22}}$ ve

* $a_{13}' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$

$a_{23}' = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$

$a_{33}' = F(x_0,y_0)$ olur.

İspat = ödev

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}}$$

SONUÇ:

$a'_{13}=0, \; a'_{23}=0 \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_{13} \\ -a_{23}\end{bmatrix}$ matris denkleminin bir çözümü var. $\iff$ $d_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0\}$, $d_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0\}$ doğruları (x_0,y_0)'dan geçmektedir.

İspat: önermenin doğrudan bir sonucu (Bkz: $*$)

SORU: $a'_{13}=0$, $a'_{23}=0$ olacak öteleme her zaman var mı?

Cevap: $\boxed{\text{Sadece } (a_{12}, a_{22})=k(a_{11},a_{12}) \text{ ve } (a_{23}\neq k a_{13})}$ iken yok. $\to d_1\cap d_2=\emptyset$ iken

$|A_{33}|\neq 0 \Rightarrow d_1\cap d_2=\{(x_0,y_0)\}$

$|A_{33}|=0$: $\boxed{(a_{12},a_{22})=k(a_{11},a_{12}) \text{ ve } a_{23}=k a_{13}} \iff d_1=d_2$

$\boxed{(a_{12},a_{22})=k(a_{11},a_{12}) \text{ ve } a_{23}\neq k a_{13}} \iff d_1\cap d_2=\emptyset$

NOT: $a'_{13}=0$ veya $a'_{23}=0$ olacak şekilde sonsuz öteleme vardır, çünkü $a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0$ olacak sonsuz $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ var.

Dönme

R_θ dönmesi $\begin{bmatrix} x' \\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$ formülü ile veriliyordu.

$\boxed{\text{Önerme}}$ R_θ dönmesi yapılırsa (yani $x=\cos\theta\, x'-\sin\theta\, y'$, $y=\sin\theta\, x'+\cos\theta\, y'$ yazılırsa) denklemin katsayıları şu şekilde olur.

$a'_{11}=a_{11}\cos^2\theta+a_{12}\sin 2\theta+a_{22}\sin^2\theta$

$a'_{22}=a_{11}\sin^2\theta-a_{12}\sin 2\theta+a_{22}\cos^2\theta$

$a'_{12}=\frac{1}{2}(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta+a_{12}\cos 2\theta$

$\begin{bmatrix} a'_{13} \\ a'_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23}\end{bmatrix}$ ve $\boxed{a'_{33}=a_{33}}$

İspat ödev

Sonuç: $a'_{12}=0 \iff$

① $a_{11}=a_{22}$ ve $\theta=\pi/4$

② $a_{11}\neq a_{22}$ ve $\tan 2\theta=\dfrac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$

ÖZET

① x^2 ve y^2 nin katsayıları aynı ise $(a_{11}=a_{22})$ $\theta=\frac{\pi}{4}$ radyan dönme ile xy'li terim yok edilebilir.

② $a_{11}\neq a_{22}$ ise $\theta=\arctan\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right)$ dönmesi ile xy'li terim yok edilebilir.

③ $\left.\begin{matrix}a_{13}=0\\ a_{23}=0\end{matrix}\right. \Rightarrow \left.\begin{matrix}a'_{13}=0\\ a'_{23}=0\end{matrix}\right\}$ olacağından önce öteleme ile x ve y'li terim yok edilirse dönme ile yeniden ortaya çıkmaz.

Önerme: A_{33} dönme ve öteleme ile değişmez.

Genel strateji

① $A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ veya $(a_{12},a_{22},a_{23})=k(a_{11},a_{12},a_{13})$

olacak $k\in\mathbb{R}$ varsa önce öteleme ile x ve y'li terim yok edilir. Sonra dönme ile **xy'li** terim yok edilir.

② Diğer durumda önce dönme ile xy'li terim yok edilir, sonra öteleme ile x'li veya y'li terim yok edilir

$(A_{33}=0,\ (a_{12},a_{22})=k(a_{11},a_{12})$ ve $a_{23}\neq ka_{13})$

Sonuç:

① $A_{33}\neq 0$ ise öteleme + dönme $\Rightarrow a''_{11}x''^2+a''_{22}y''^2+a''_{33}=0$ elde edilir. $A_{33}=a''_{11}a''_{22}-0^2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$

a-) $A_{33}>0$ ($sgn(a''_{11})=sgn(a''_{22})$) işaretler aynıysa

$\rightarrow sgn(a''_{11})=sgn(a''_{33})$ ise $\boxed{S(F):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}=\emptyset}$ olur

$\rightarrow sgn(a''_{11})=-(\ldots)$ ise $S(F): \frac{x''^2}{\frac{-a''_{33}}{a''_{11}}}+\frac{y''^2}{\frac{-a''_{33}}{a''_{22}}}=1$ elips olur.

$\rightarrow a_{33}'' = 0$ ise $S(F) = \{(0,0)\}$ olur. (Bozulmuş elips)

(b) $A_{33} < 0$ ise yani $\operatorname{sgn}(a_{11}'') = -\operatorname{sgn}(a_{22}'')$

$\rightarrow a_{33}'' \neq 0$ ise $\dfrac{x''^2}{\underbrace{\frac{-a_{33}''}{a_{11}''}}_{a^2}} - \dfrac{y''^2}{\underbrace{\frac{a_{33}''}{a_{22}''}}_{b^2}} = 1$ veya $\dfrac{-x''^2}{\underbrace{\frac{a_{33}''}{a_{11}''}}_{a^2}} + \dfrac{y''^2}{\underbrace{\frac{-a_{33}''}{a_{22}''}}_{b^2}} = 1$

hiperbolü elde edilir.

$\rightarrow a_{33}'' = 0$ ise $a_{11}'' x''^2 = -a_{22}'' y''^2$ $\quad y'' = \mp\sqrt{\dfrac{-a_{11}''}{a_{22}''}}\, x''$

doğruların birleşimi olur. (bozulmuş hiperbol)

(2) $A_{33} = 0$ ise dönme ile $x'y'$-lü terim yok edilir.

($a_{12}' = 0$ olur.) $(a_{11}', a_{12}', a_{22}') \neq (0,0,0)$ old. için,

$$A_{33}' = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix} = a_{11}' \cdot a_{22}' = 0$$

$a_{11}' = 0$ (x'^2 yok) $\qquad a_{22}' = 0$ (y'^2 yok)

a.) $a_{11}' = 0$ ve $a_{22}' \neq 0$

$\rightarrow$ öteleme ile x' ve y' yok edilirse $(y'')^2 = \dfrac{-a_{33}''}{a_{22}''}$ $\rightarrow \emptyset$; $\rightarrow$ 2 doğrunun birleşimi

$\rightarrow$ öteleme ile x' ve y' yok edilemezse y' yok edilir:

$\underline{a_{22}' y'^2} + a_{13}' x' + \underline{a_{23}' y'} + a_{33}' = 0 \rightarrow a_{22}' y''^2 = -a_{13}' x' - a_{33}''$

$$\boxed{a_{22}'\Big(\underbrace{y' + \frac{a_{23}'}{2a_{22}'}}_{y''}\Big)^2 - \frac{a_{23}'^2}{4a_{22}'^2}}$$

$y''^2 = \dfrac{-a_{13}' x'}{a_{22}'} - \dfrac{a_{33}''}{a_{13}' a_{22}'}$

$y''^2 = 2px''$ parabolü elde edilir.

b-) $a_{11}' \neq 0$ ve $a_{22}' = 0$ iken yukarıdaki gibi

$\rightarrow \emptyset$, $\rightarrow$ 2 doğru veya $\rightarrow$ parabol $x''^2 = 2px''$ elde edilir.

$A_{33} > 0$ eliptik

$A_{33} < 0$ hiperbolik

$A_{33} = 0$ parabolik

18 Şubat 2016
2. ders

Geçen ders

$$* \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \xrightarrow[\text{öteleme}]{\text{dönme}} \text{Basit denklem}$$

- elips
- hiperbol
- parabol
- $\emptyset$
- iki doğru

Örnek

① $x^2+y^2+2xy-2=0$ denklemi ne belirtir?

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & xy & & \\ x^2 & 1 & 1 & 0 & x \\ xy & 1 & 1 & 0 & y \\ & 0 & 0 & -2 & \\ \hline & x & y & \text{sabit} & \end{array}$$

$a_{11}=a_{22} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

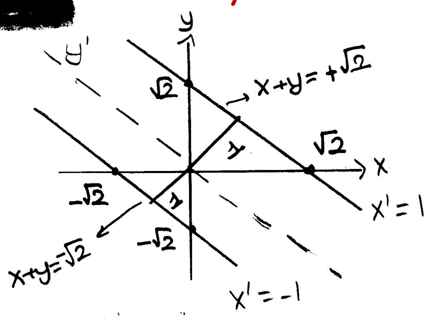
$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \qquad y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

$(\sqrt{2}\cdot x')^2 = (x+y)^2 = 2 \Longleftrightarrow 2x'^2 = 2 \Leftrightarrow x'^2 = 1 \Leftrightarrow x' = 1$ veya $x' = -1$

[redacted] GRAFİK

1. yol:



2. yol ($x'y'$- eksenlerini kullanmadan)

$\boxed{x' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} = 1 \Longleftrightarrow x+y = \sqrt{2}}$

$\boxed{x' = -1 \Longleftrightarrow x+y = -\sqrt{2}}$

② $x^2+y^2+2xy-2x+2y+2=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ sistemin çözümü yok

$a_{11} = a_{22} = 1$

$\therefore$ Önce, $\theta = \frac{\pi}{4}$ dönmesi yapalım.

●

$(x+y)^2 - 2(x-y) + 2 = 0$

$(\sqrt{2}x')^2 - 2(\sqrt{2}y') + 2 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ dönmesi sonucu elde edilen denklem

$x'^2 + \sqrt{2}y' + 1 = 0$

$\underbrace{x'^2}_{x''^2} + \sqrt{2}\underbrace{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{y''^2} = 0$

$x''^2 = -\sqrt{2}y'' \longrightarrow$ parabol $\Rightarrow$ Sorudaki denklem de parabol belirtir, çünkü öteleme ve dönme şeklin tipini korur.

$x'' = x'$

$y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow$ ötelenmesiyle elde edilen denklem : $\boxed{x''^2 = -\sqrt{2}y''}$

* [redacted] ~~dönme~~ [redacted]

③ $x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ nedir?

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 - 2y_0 &= -1 \\ -2x_0 + y_0 &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 1 \end{aligned}$$

$x = x' + 1 \qquad y = y' + 1$

$$0=a_{13}'=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}$$

$$0=a_{23}'=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x'+x_0\\ y&=y'+y_0\end{aligned}}$$

$$(x'+1)^2-4(x'+1)(y'+1)+(y'+1)^2+2(x'+1)+2(y'+1)+1=0$$

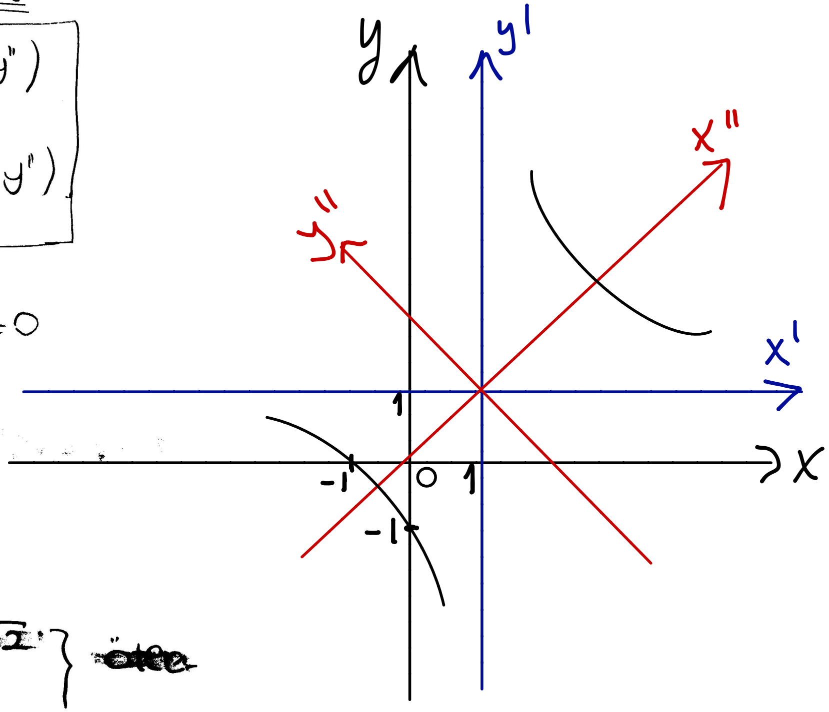
$$x'^2+2x'+1-4x'y'-4x'-4y'-4+y'^2+2y'+2x'+2+2y'+2+1=0$$

$$\Rightarrow x'^2-4x'y'+y'^2+3=0$$

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{4} \qquad x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y'') \qquad y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y'')}$$

$$\frac{1}{2}(x''-y'')^2-4\cdot\frac{1}{2}(x''^2-y''^2)+\frac{1}{2}(x''+y'')^2+3=0$$

$$-x''^2+3y''^2+3=0\,,\quad \boxed{\frac{x''^2}{3}-y''^2=1}$$

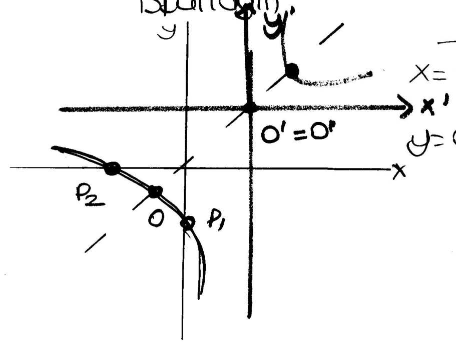


NOT : [redacted]

Yani; $\boxed{R_{\pi/4}\circ T(-1,-1) = T(-\sqrt{2},0)\circ R_{\pi/4}}$

Ödev $\boxed{R_\theta \circ T_{(a,b)} = T_{(a,b)} \circ R_\theta} \iff (a,b)=(0,0)$ veya $\theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

ispatlayın.



$x^2-4xy+y^2+2x+2y+1=0$'ın x ve y kesenı:

$x=0 \Rightarrow (y+1)^2=0 \Rightarrow y=-1 \qquad (0,-1)=P_1$

$y=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1 \qquad (-1,0)=P_2$

(4) $2x^2+3y^2-8x+6y-7=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ öteleme ile x,y yok olur.

$2x_0-4=0 \qquad x_0=2$

$3y_0=3 \Rightarrow y_0=-1 \qquad T(2,-1)$

$x=x'+2 \qquad x'=x-2$

$y=y'-1 \Rightarrow y'=y+1$

$$2\underbrace{(x-2)^2}_{x'}-8+3\underbrace{(y+1)^2}_{y'}-3-7=0$$

$$\frac{2x'^2}{18}+\frac{3y'^2}{18}=\cancel{\frac{18}{18}}$$

$\boxed{\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{6}=1} \to$ elips