Sonuç: $\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$ düzlemleri;

a) bir doğru ve dışındaki bir noktayı,

b) doğrudaş olmayan 3 noktayı

içerirse çakışıktır, yani $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$'dir.

Kanıt: a) $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$ iken $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ en fazla doğru olacağından ispat biter.

b) A, B, C doğrudaş değilse $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ birbirinin katı olamayacağından,

$\mathcal{D} = \{A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ kümesi

$A\,(s=0=t)$, $B\,(s=1, t=0)$ ve $C\,(s=0, t=1)$

noktalarından geçen bir düzlemdir.

$d = \{A + s\overrightarrow{AB} \mid s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{D}$ doğrusu A ve B'yi içerirken C'den geçmez. Bu yüzden a) şıkkından dolayı A, B ve C'den geçen tek düzlem $\mathcal{D}$'dir.

İki doğrunun kesişimi:

$u=(u_1,u_2,u_3)\neq 0\neq v=(v_1,v_2,v_3)$; $A=(a_1,a_2,a_3)\neq B=(b_1,b_2,b_3)$

olmak üzere $d_1=\{A+tu \mid t\in\mathbb{R}\}$ doğrusu ile

$d_2=\{B+sv \mid s\in\mathbb{R}\}$ doğrusunu ele alalım.

Teorem: i) $d_1\cap d_2=\emptyset \iff v$, u'nun sıfırdan

farklı bir katı ama $B-A$, u'nun bir katı değil.

(doğrular aynı düzlemde ama paralel)

veya v, u'nun katı değil, $B-A=tu-sv$, olacak $s,t\in\mathbb{R}$ yok.

(doğrular paralel düzlemde)

ii) $d_1=d_2 \iff v$ ve $B-A$, u'nun katı.

iii) $d_1\cap d_2=\{\text{Nokta}\} \iff v$, u'nun bir katı değil, ve $B-A=tu-sv$ olacak (TEK) s,t var.

Kanıt: Genel olarak 3 durum vardır:

i) $v=\lambda u$ ve $B-A=\mu u$ olacak $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ var $\mu\in\mathbb{R}$ yok.

ii) $v=\lambda u$ ve $B-A=\mu u$ olacak $\lambda,\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ var

iii) $v=\lambda u$ olacak $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ yok. → $B-A=tu-sv$ olacak s,t yok
→ 〃 〃 var

Durum (i & ii) Bir $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $v=\lambda u$ olsun. $P\in d_1\cap d_2$

$\iff \exists t,s\in\mathbb{R}: \quad A+tu=P=B+sv.$

$\iff \exists t,s\in\mathbb{R}: \quad B-A=tu-sv.$

$\overset{v=\lambda u}{\iff} \exists t,s\in\mathbb{R}: \quad B-A=(t-s\lambda)u.$

Dolayısıyla, son önerme, $B-A=\mu u$ olacak $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ yoksa yanlış olacağından $P\in d_1\cap d_2$ olacak P yoktur. Yani $d_1\cap d_2=\emptyset$ olur. (i)'nin ilk kısmı biter.

Eğer, $B-A=\mu u$ olacak $\mu\in\mathbb{R}$ varsa, $t-s\lambda=\mu$ eşitliğini her t için sağlayan bir $s\left(=\frac{t+\mu}{\lambda}\right)$ ve her $s\in\mathbb{R}$ için sağlayan bir $t\,(=s\lambda+\mu)$ reel sayısı vardır. Bu yüzden, $P\in d_1 \Leftrightarrow P\in d_2$ elde edilir ki $d_1=d_2$ demektir.

i) ve iii) $v=\lambda u$ olacak $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olmasın. $B-A=tu-sv$ olacak $t,s\in\mathbb{R}$ yoksa $A+tu=B+sv$ olacak s,t yani d_1 ve d_2'nin ortak noktası yoktur. i)'in ikinci kısmı elde edilir. $B-A=tu-sv$ olacak $t,s\in\mathbb{R}$ varsa tektir, çünkü her t,s ikilisi $d_1\cap d_2$'nin bir elemanını verir ve $P_1,P_2\in d_1\cap d_2$ iken $P_1=A+t_1u=B+s_1v$ ile $P_2=A+t_2u=B+s_2v$'den $\overrightarrow{P_1P_2}=P_2-P_1=(t_2-t_1)u=(s_2-s_1)v$ çelişkisi elde edilir. $|d_1\cap d_2|=1$ olur. $\square$

Sonuç: 1) Uzayda farklı iki doğru ya kesişmez ya da TEK noktada kesişir.

2) Uzayda farklı iki noktadan TEK doğru geçer.

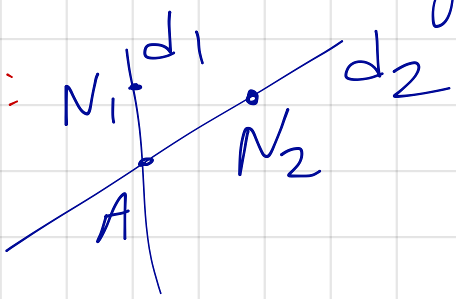
Kanıt: 1) Bir önceki Teoremin doğrudan bir sonucu.

2) $d=\{A+t(B-A) \mid t\in\mathbb{R}\}=\{(1-t)A+tB \mid t\in\mathbb{R}\}$ ise $t=0$ iken $A\in d$, $t=1$ iken $B\in d$ olduğundan $A,B\in\mathbb{R}^3$'ten geçen en az bir d doğrusu vardır.

d' doğrusu A ve B'den geçen herhangi bir doğru ise $A,B\in d\cap d'$ olacağından $|d\cap d'|>1$'dir.

1) şıkkına göre $d=d'$ olmak zorunda. $\square$

Sonuç: Uzayda kesişen iki doğru TEK bir düzlemde yatar.

Kanıt: 

Şekilde görüldüğü gibi $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ iken $N_1 \in d_1 \setminus \{A\}$ ve $N_2 \in d_2 \setminus \{A\}$ noktalarını alalım.

A, N_1 ve N_2 doğrudaş değildir, çünkü mesela $N_2 \in d_1$ olsaydı $N_2 \in d_1 \cap d_2$ olurdu.

Bu yüzden bu 3 noktadan geçen TEK düzlem vardır.

Alıştırmalar

1) $d_1 = \{(2+3t, 1-t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ve

$d_2 = \{(11+6s, -2-2s, 12+8s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ise

$d_1 \cap d_2 = ?$

2) $d_3 = \{(6s, -2-2s, 12+8s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ ise

$d_1 \cap d_3 = ?$ ve $d_2 \cap d_3 = ?$

3) $d_4 = \{(3r, -2-r, 2+3r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ise

$d_1 \cap d_4 = ?$ $d_2 \cap d_4 = ?$ $d_3 \cap d_4 = ?$

4) $A = (1,2,3)$ ise A'dan geçen her doğru

$d = \{(1+u_1 t, 2+u_2 t, 3+u_3 t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ şeklinde

bir kümeye eşittir gösteriniz.

5) $A \in \mathbb{R}^3$ ise A'dan geçen her doğrunun

bir $u \in \mathbb{R}^3$ için $d_u = \{A + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ şeklinde

yazılabileceğini gösteriniz.

(İpucu: Uzayda her doğru $\{B + su \mid s \in \mathbb{R}\}$ şeklinde)