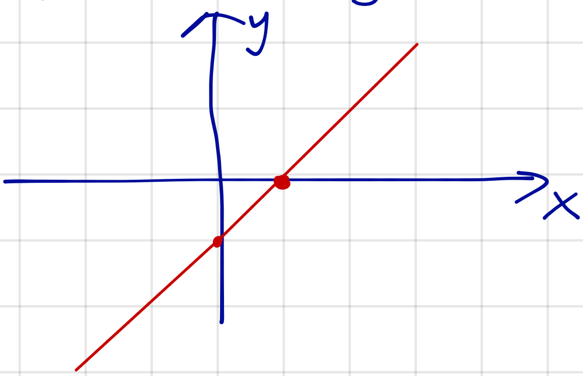
Ders 1:

1.1. Eğri Nedir?

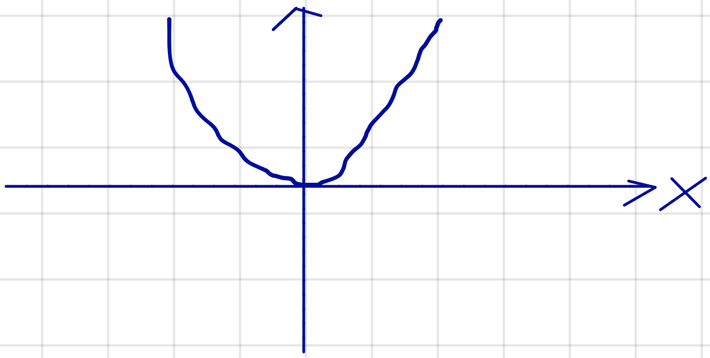
Seviye eğrisi

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$$ şeklindeki altkümeler düzlemde eğri tanımlıyordu. Örneğin, $f(x,y) = x - y$ $c = 1$ iken elde edilen eğri



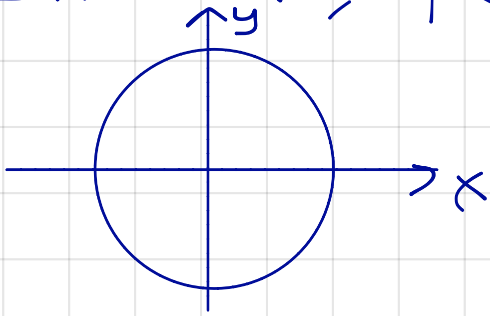
$x - y = 1$ veya $y = x - 1$ doğrusudur.

$f(x,y) = y - x^2$ ve $c = 0$ iken C eğrisi



parabolüdür.

Son olarak, $f(x,y) = x^2 + y^2$ ve $c = 1$ iken



C eğrisi birim çemberdir.

Uyarı: Eğrinin bu tanımı "durağan=statik" denilebilir.

çünkü eğriye $\mathbb{R}^2$'nin durağan bir altkümesi gözüyle bakılıyor.

Aynı üç eğriyi parametrik olarak tanımlarsak "hareket" söz konusu olur.

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=1\}$ doğrusunun bir parametrik denklemi : $\boxed{\begin{array}{l} x=t \\ y=t-1 \end{array}}$ şeklinde iken başka bir parametrik denklemi : $\boxed{\begin{array}{l} x=s^3+1 \\ y=s^3 \end{array}}$ şeklindedir.

Bu bize 2 farklı fonksiyonu işaret eder:

$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, t-1)$ ve

$\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(s) = (s^3+1, s^3)$.

Dikkat edilirse $\gamma_1(\mathbb{R}) = C_1 = \gamma_2(\mathbb{R})$.

Burada t veya s'ye "zaman" gözüyle bakılırsa $\gamma_1(t)$ veya $\gamma_2(s)$, düzlemde bir cismin t veya s anında C_1 doğrusu üzerindeki konumunu belirtir. Bu bakış açısı söz konusu cismin hareketini (örneğin hızını) anlamayı mümkün kılar.

Tanım: $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ olmak üzere her $\gamma : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna "parametrik eğri" denir. (Aslında, $\gamma(\alpha,\beta)$ altkümesi eğri?)

Tanım: Eğer $\gamma(\alpha,\beta) \subseteq C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ ise γ'ya C'nin bir parametrizasyonu denir.

Ör: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$

$\gamma : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (s^2+1, s^2)$ iken $\gamma(-\infty,\infty) \subset C$'dir, çünkü $x = s^2+1$, $y = s^2$ iken $x - y = 1$ denklemi sağlanır.

Ancak $\gamma(-\infty,\infty) \neq C$, çünkü $\gamma(s) = (0,-1) \in C$ olacak s YOK!

Tanıma göre, γ parametrik eğrisi C seviye eğrisinin bir PARAMETRİZASYONU'dur.

Ör: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ parabolünün parametrizasyonlarından bir kaçı şu şekildedir:

$\gamma_1 : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, t^2)$

$\gamma_2 : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(s) = (s^3, s^6)$

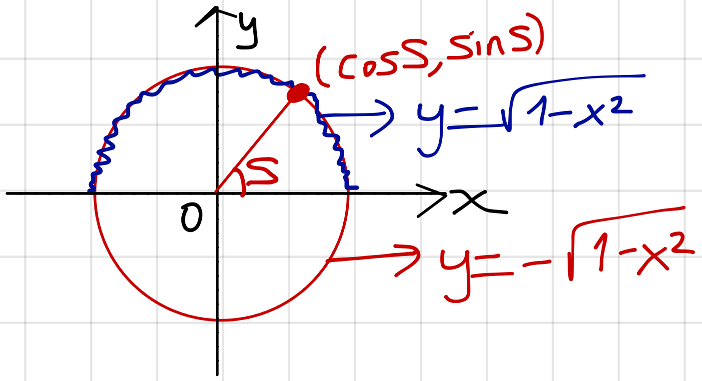
$\gamma_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (\sqrt{t}, t)$

$\gamma_4 : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_4(s) = (s^2, s^4)$

$\overline{\gamma_3} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \overline{\gamma_3}(t) = (-\sqrt{t}, t)$

Ör: (Birim Çemberin parametrizasyonları)

$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ veya $y=-\sqrt{1-x^2}$



$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$

$\gamma_2(t) = (t, -\sqrt{1-t^2})$

$\gamma_3(s) = (\cos s, \sin s), \quad 0 < s < 2\pi + \varepsilon$ → pozitif reel

$\gamma_4(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 < t < \pi + \varepsilon$

iken γ_3 ve γ_4 çemberin tamamını parametrize eder.

Yorum: γ_3 fonksiyonu $(1,0)$'dan yola çıkan bir cismin s saniye sonra $\gamma_3(s)$ noktasına ulaşmasını ifade ederse γ_4 de aynı noktaya t saniyede ulaşmayı ifade eder.

$s=2t$ iken $\gamma_3(s)=\gamma_4(t)$ olduğundan γ_4 parametrik eğrisi γ_3'den 2 kat hızlı bir hareketi ifade etmektedir.

Tanım: $\gamma:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^n$, $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$ olsun.

1) $\forall t\in I$ ve her $i=1,\dots,n$ için γ_i tek değişkenli fonksiyonunun t'de türevi varsa γ'ya diferansiyellenebilir (parametrik) eğri denir.

2) Eğer γ dif. bilir ve $\dot{\gamma}_i$ fonk. sürekli ise γ'ya C^1-sınıfından denir.

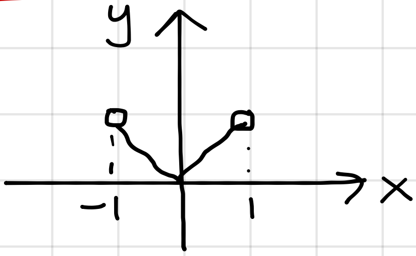
3) Eğer γ_i'lerin her noktada k. türevi var ve sürekli ise γ'ya C^k-sınıfından denir.

4) γ, C^∞-sınıfından ise düzgün denir.

Not: γ düzgün $\Longleftrightarrow$ Her $i=1,\dots,n$ için γ_i'nin her noktada her mertebeden türevi vardır.

Çünkü, γ_i'nin k. mertebeden türevi varsa $(k-1)$. türevi süreklidir.

Ör: $\gamma:(-1,1)\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,|t|)$ olsun.



γ dif.bilir değil, çünkü $\gamma_2(t)=|t|$ $t=0$'da türeve sahip değil!

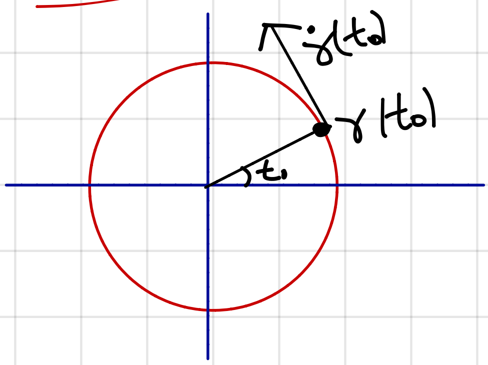
Bu yüzden $\gamma\notin C^1(-1,1)\supset \boxed{C^\infty(-1,1)}$ → γ düzgün de değil!

Not: $\underbrace{C^0(\alpha,\beta)}_{\text{sürekli}}\supset \underbrace{D(\alpha,\beta)}_{\text{dif.bilir.}}\supset \underbrace{C^1(\alpha,\beta)}_{\text{sürekli türevi var}} \ldots \supset \underbrace{C^\infty(\alpha,\beta)}_{\text{düzgün}}$

KABUL: Bundan sonra aksi belirtilmedikçe eğri denilince düzgün eğri kastedilecektir.

Tanım: $\dot{\gamma}(t_0)=\left.\dfrac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0}$ vektörüne γ'nın $\gamma(t_0)$ noktasındaki teğet vektörü denir.

Ör: $\gamma(t)=(\cos 2t,\sin 2t)$ ise $\dot{\gamma}(t)=(-2\sin 2t, 2\cos 2t)$'dir.



Dikkat: $\gamma(t)\cdot\dot{\gamma}(t)=0$

yani $\gamma(t)\perp\dot{\gamma}(t)$!

Önerme 1.1 γ'nın teğet vektörü sabitse γ bir doğruyu parametrize eder.

Kanıt: $\dot{\gamma}(t)=\vec{a}$, $\forall t\in(\alpha,\beta)$ ise $\gamma(t)=\vec{a}t+\vec{b}$ olur.

$\vec{a}=\vec{0}$ iken γ, konum vektörü $\vec{b}$ olan bir noktadır. $\vec{a}\neq\vec{0}$ ise γ, $\vec{a}$'ya paralel konum vektörü $\vec{b}$ olan noktadan geçen bir doğruyu parametrize eder.

Alıştırmalar:

1) a) $y^2-x^2=1$ hiperbolünün bir parametrizasyonu = ?

b) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ elipsinin //

2) Aşağıdaki parametrik eğrilerin kapalı denk = ?

a) $\gamma(t)=(\cos^2 t,\sin^2 t)$ b) $\gamma(t)=(e^t,t^2)$

3) İlk iki sorudaki parametrik eğrilerin teğet vektörlerini bulunuz.

1.2 Yay Uzunluğu

Tanım: γ'nın $\gamma(t_0)$ ile $\gamma(t)$ arasında kalan kısmının uzunluğu $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\dot{\gamma}(u)\|du$ fonksiyonu ile ölçülür ve $s(t)$'ye γ'nın yay-uzunluğu fonksiyonu denir. **Uyarı:** Burada $t_0<t$ alınmıştır.

Ör: $\gamma(t)=(\cos 2t, \sin 2t) \Rightarrow \dot{\gamma}(t)=(-2\sin 2t, 2\cos 2t)$

$\|\dot{\gamma}(u)\|=2$ ve $s(t)=\int_0^t 2\,du = 2u\Big|_0^t = 2t$

$\gamma(t)$'yi veren merkez açının ölçüsü

Tanım: $\|\dot{\gamma}(t)\|$ sayısına γ'nın hızı denir. $\|\dot{\gamma}(t)\|=1$ $\forall t\in(\alpha,\beta) \Rightarrow \gamma$'ya birim-hızlı denir.

Ör: $\gamma(t)=(\cos 2t, \sin 2t)$ için $\|\dot{\gamma}(u)\|=2\neq 1$ olduğundan γ birim hızlı değildir.

Ancak, birim çemberin $\Gamma(s)=(\cos s, \sin s)$ parametrizasyonunun hızı $\|\dot{\Gamma}(s)\|=1$'dir.

Zaten, γ'nın Γ'dan 2 kat hızlı olduğunu gözlemlemiştik.

Önerme 1.2 $n(t)$ düzgün fonksiyonu her t için birim vektör tanımlıyorsa $\dot{n}(t)\cdot n(t)=0$'dır.

Yani, $\dot{n}(t)$ ya sıfırdır ya da $n(t)$'ye diktir.

Özel olarak, γ birim-hızlı ise $\ddot{\gamma}=0$ veya $\ddot{\gamma}\perp\dot{\gamma}$.

Kanıt: $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$ formülünü kullanarak $n\cdot n=1$'in her iki yanının t'ye göre türevini alırsak $\dot{n}\cdot n+n\cdot\dot{n}=0 \Rightarrow \dot{n}\cdot n=0$ elde edilir.

İkinci kısım için $n=\dot{\gamma}$ almak yeterlidir.

Alıştırma

Aşağıdaki eğrilerin birim-hızlı olduğunu gösteriniz:

a) $\gamma(t)=\left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2},\ \frac{1}{3}(1-t)^{3/2},\ \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

b) $\gamma(t)=\left(\frac{4}{5}\cos t,\ 1-\sin t,\ -\frac{3}{5}\cos t\right)$

$\|\dot{\gamma}\|=1 \Rightarrow \dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}=1$

$\Rightarrow \ddot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}+\dot{\gamma}\ddot{\gamma}=0 \Rightarrow \dot{\gamma}\perp\ddot{\gamma}.$

$\vec{t}=\dot{\gamma}\quad \vec{n}=\ddot{\gamma}/\|\ddot{\gamma}\| \Rightarrow \vec{t}\perp\vec{n}.$

1.3 Reparametrizasyon

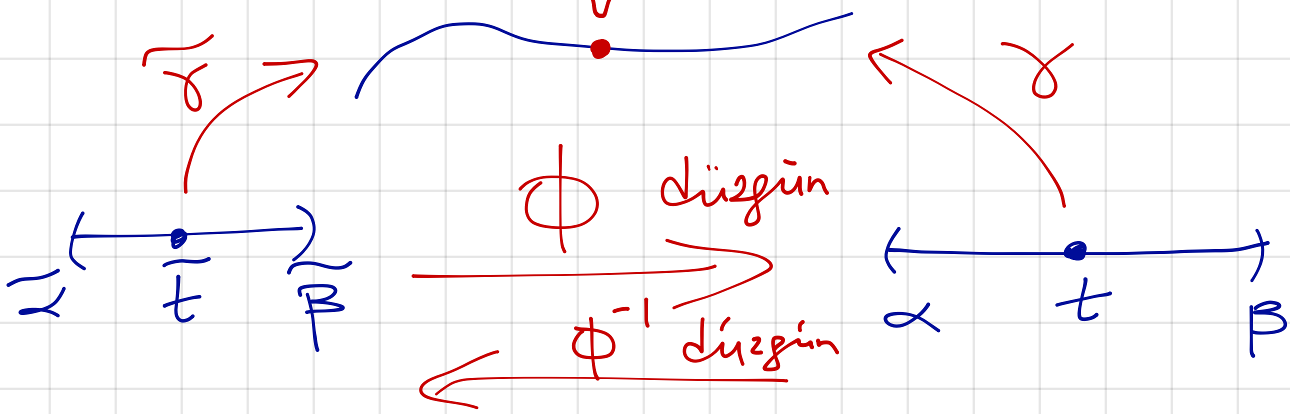
Tanım: $\gamma:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^n$ ve $\tilde{\gamma}:(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\to\mathbb{R}^n$ eğrileri için aşağıdakiler sağlanırsa $\tilde{\gamma}$ eğrisine γ'nın reparametrizasyonu denir:

i) 1-1, örten ve düzgün bir $\phi:(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\to(\alpha,\beta)$ vardır,

ii) $\phi^{-1}:(\alpha,\beta)\to(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ düzgündür,

iii) $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=\gamma(\phi(\tilde{t}))$, $\forall\, \tilde{t}\in(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$.

$t=\phi(\tilde{t})$ için $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=\gamma(t)$ noktası



UYARI: $\tilde{\gamma}$, γ'nın reparametrizasyonu ise γ da $\tilde{\gamma}$'nın reparametrizasyonudur. $t=\phi(\tilde{t}) \Leftrightarrow \tilde{t}=\phi^{-1}(t)$

Ör: $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ ve $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=(\sin\tilde{t},\cos\tilde{t})$ birbirinin reparametrizasyonudur, çünkü

$(\cos t,\sin t)=(\sin\tilde{t},\cos\tilde{t})$ olacak şekilde bir $t=\phi(\tilde{t})=\frac{\pi}{2}-\tilde{t}$ fonksiyonu var.

Bu fonksiyonun tersi de var: $\tilde{t}=\phi^{-1}(t)=\frac{\pi}{2}-t$.

Hem ϕ hem de ϕ^{-1} (1. derece) polinom oldukları için sonsuz mertebeden türeve sahiptir, yani düzgündür.

Ör: (Parabol) $\gamma(t)=(t,t^2)$ ve $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=(\tilde{t}^3,\tilde{t}^6)$ için $(\alpha,\beta)=(-\infty,\infty)=(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ iken eğriler birbirinin reparametrizasyonu olamazlar, çünkü

$(t,t^2)=(\tilde{t}^3,\tilde{t}^6)$ olacak şekilde $t=\phi(\tilde{t})=\tilde{t}^3$

düzgün ve tersinir fonksiyonu var ancak

$\phi^{-1}(t)=\sqrt[3]{t}$ fonksiyonu $t=0$'da düzgün değil.

Öte yandan, 0'ı içermeyen her (α,β) aralığı için reparametrizasyon elde ederiz, çünkü

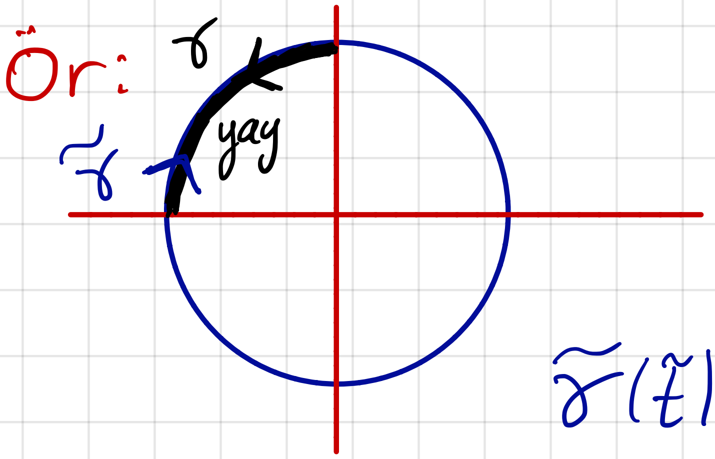
$(\phi^{-1})'=\frac{1}{3\cdot t^{2/3}}$, $(\phi^{-1})''=(t^{-2/3})'=-\frac{2}{3}\cdot t^{(-\frac{5}{3})}$, $(\phi^{-1})'''=\frac{10}{9}t^{-\frac{8}{3}}$,

ve genel olarak $(\phi^{-1})^{(n)}=(\text{sayı})\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t^{3n-1}}}$ fonksiyonu

Ödev: tümevarımla ispatla

$t\neq 0$ iken tanımlıdır.

Ör:



$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\boxed{t = \phi(\tilde{t}) = \pi - \tilde{t}}$$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(\pi - \tilde{t}) = (-\cos\tilde{t}, \sin\tilde{t})$$

$\gamma(\pi/2)$ ile $\gamma(\pi)$ arasındaki yayın uzunluğu:

$$s = \int_{\pi/2}^{\pi} \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_{\pi/2}^{\pi} 1\, du = u\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{matrix}\pi \\ \pi/2\end{matrix}\Big| u = \phi(\tilde{u}) \Big|_{\pi/2}^{0} \Rightarrow du = -d\tilde{u} \text{ ve } \left|\frac{d\tilde{u}}{du}\right| = 1 \text{ olur.}$$

$\tilde{\gamma}(\tilde{u}) = \gamma(\phi(\tilde{u})) = \gamma(u)$ 'nun u'ya göre türevini alırsak,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u}) \cdot \frac{d\tilde{u}}{du} = \dot{\gamma}(u) \Rightarrow \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\| = \|\dot{\gamma}(u)\| \text{ olur.}$$

$$s = \int_{\pi/2}^{0} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\| \cdot (-d\tilde{u}) = \int_{0}^{\pi/2} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\| d\tilde{u} \text{ olur.}$$

Görüldüğü üzere, $\gamma(\pi/2) = \tilde{\gamma}(\pi/2)$ ile $\gamma(\pi) = \tilde{\gamma}(0)$ arasında kalan yayın uzunluğu $\int_{\pi/2}^{\pi} 1\, du = \int_{0}^{\pi/2} 1\, d\tilde{u} = \pi/2$ olarak bulunur.

UYARI(*) $t=\phi(\tilde{t})$ için $\tilde{\gamma}(\tilde{t}):=\gamma(\phi(\tilde{t}))$ eğrisi $\gamma(t)$'nin bir reparametrizasyonu ise

$$\frac{dt}{d\tilde{t}}=\frac{d\phi}{d\tilde{t}}>0 \quad \text{veya} \quad \frac{dt}{d\tilde{t}}=\frac{d\phi}{d\tilde{t}}<0, \text{ yani}$$

ϕ (ve ϕ^{-1}) artan yahut azalan bir fonksiyondur.

Bu yüzden; $\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t}_0)$ teğet vektörü, $\dot{\gamma}(t_0)$ teğetinin sıfırdan farklı bir katıdır.

KANIT: $\phi(\tilde{t})=\phi(\phi^{-1}(t))=t$ 'nin t'ye göre türevi

$\frac{d\phi}{d\tilde{t}}\cdot\frac{d\tilde{t}}{dt}=1$ olduğundan $\frac{d\phi}{d\tilde{t}}\neq 0,\ \forall \tilde{t}\in(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$.

ϕ düzgün $\Rightarrow \phi\in C^1(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ yani $\frac{d\phi}{d\tilde{t}}$ sürekli. Sürekli bir fonksiyonun, ARA DEĞER TEOREMİNE göre pozitif ve negatif değeri varsa kökü olacağından $\frac{d\phi}{d\tilde{t}}$ 'nın hem pozitif hem negatif değeri olamaz.

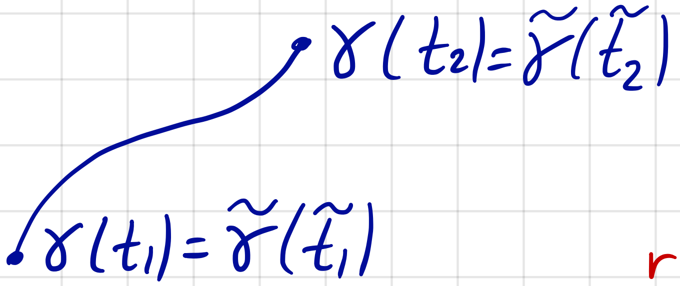
Yani, ya hep $\frac{d\phi}{d\tilde{t}}>0$ ya da hep $\frac{d\phi}{d\tilde{t}}<0$ olur.

Bu yüzden, ϕ ya artan yahut azalandır.

Benzer gerekçelerle, ϕ^{-1} de artan veya azalandır.

$\tilde{\gamma}(\tilde{t})=\gamma(t)$ 'nin $\tilde{t}$'ya göre türevi

$\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t})=\dot{\gamma}(t)\frac{dt}{d\tilde{t}}$ olduğundan $\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t}_0)=\underbrace{\phi'(\tilde{t}_0)}_{\neq 0}\dot{\gamma}(t_0)$'dır.



$$t=\phi(\tilde{t})$$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(t)$$

reparametrizasyon

$\gamma(u)=\tilde{\gamma}(\tilde{u})$ eşitliğinde her iki yanın u'ya göre türevi alınırsa,

$$\dot{\gamma}(u) = \dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u}) \cdot \frac{d\tilde{u}}{du} \Rightarrow \|\dot{\gamma}(u)\| = \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\| \left|\frac{d\tilde{u}}{du}\right| \text{ olur.}$$

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(u)\|\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c} {}_{t_1}^{t_2}\Big|\, u=\phi(\tilde{u}) \,\Big|_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \\ \hline \hline \\ du=\dfrac{du}{d\tilde{u}}.d\tilde{u} \end{array}}$$

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\| \overbrace{\left|\frac{d\tilde{u}}{du}\right| \frac{du}{d\tilde{u}}}^{\mp 1} . d\tilde{u}$$

UYARI(*)'dan, $u=\phi(\tilde{u})$ fonksiyonu artan veya azalan olduğundan, ya hep $\dfrac{du}{d\tilde{u}}>0$ ya da hep $\dfrac{du}{d\tilde{u}}<0$ olur.

Artan ise, $\left|\dfrac{d\tilde{u}}{du}\right| = \dfrac{d\tilde{u}}{du}$ ve $\tilde{t}_1<\tilde{t}_2$ olur. Yay uzunluğu;

$$s=\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\|.1.\,d\tilde{u} = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\|\,d\tilde{u} \quad \text{olur.}$$

Diğer durumda $\left|\dfrac{d\tilde{u}}{du}\right| = -\dfrac{d\tilde{u}}{du}$ ve $\tilde{t}_1>\tilde{t}_2$ olur. Yay uzunluğu;

$$s=\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\|.(-1).\,d\tilde{u} = \int_{\tilde{t}_2}^{\tilde{t}_1} \|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{u})\|\,d\tilde{u} \quad \text{olur.}$$

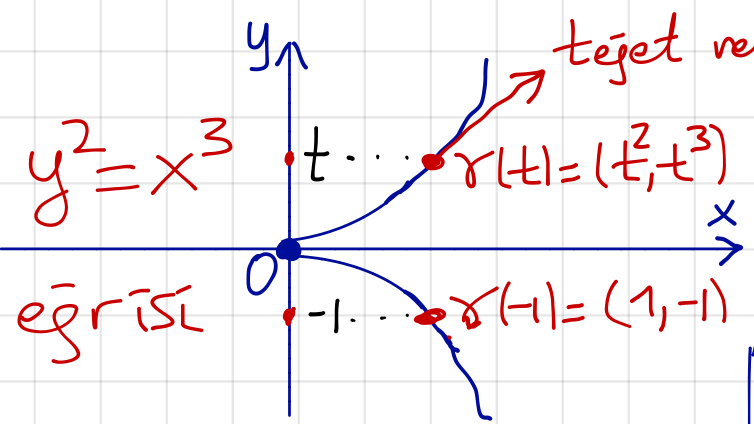
Ör: $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = (\tilde{t}^2, \tilde{t}^4)$, $\gamma(t) = (t, t^2)$'nin reparametrizasyonu değildir, çünkü $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(t)$ o.ş. $t = \phi(\tilde{t}) = \tilde{t}^2$ fonksiyonu varolsa bile 1-1 değildir.

$(\alpha, \beta) = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$'yı $(0, \infty)$ veya bir alt aralığı seçersek ϕ tersinir olur ve $\phi^{-1}(t) = \sqrt{t}$ olur.

Hem ϕ (polinom) hem de ϕ^{-1} fonksiyonu ($t > 0$ iken) her mertebeden türeve sahip (düzgün) olduğundan $\tilde{\gamma}$, γ'nın reparametrizasyonu olur.

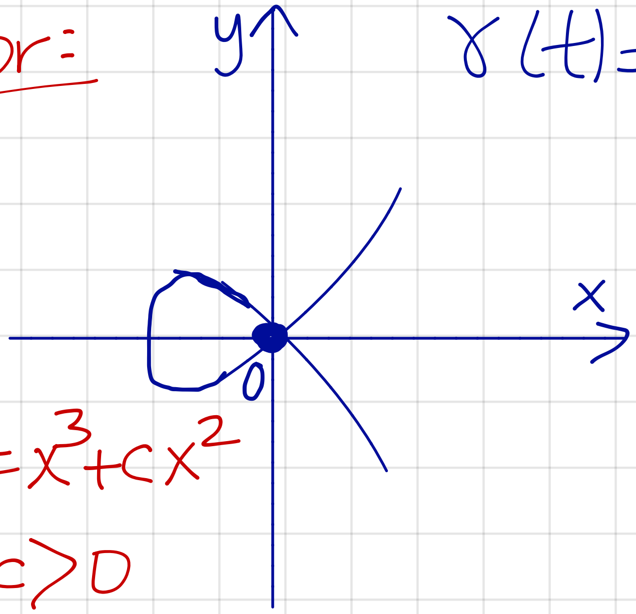
Tanım (Düzenli eğri) γ eğrisi için $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ ise $\gamma(t)$ noktasına düzenli yoksa düzensiz denir. Her $t \in (\alpha, \beta)$ için $\gamma(t)$ düzenli ise, yani $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ ise, γ'ya düzenli eğri denir.

Ör: $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$



$\dot{\gamma}(t) = 0 \iff t = 0$ olduğundan $(0,0)$ hariç her noktası düzenli ama γ düzenli değil.

Ör:



$y^2 = x^3 + cx^2$

$c > 0$

$\gamma(t) = (t^2 - c, t^3 - ct)$ ise

$\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2 - c)$ ve

her $t \in \mathbb{R}$ için $\dot{\gamma}(t) \neq (0,0)$

olduğundan γ düzenli

eğridir.

Önerme 1.3: Düzenli bir eğrinin her reparametrizasyonu düzenlidir.

İspat: $\tilde{\gamma}$, γ'nın reparametrizasyonu ve her $t \in (\alpha, \beta)$ için $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ olsun.

$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(t)$'nin $\tilde{t}$'ya göre türevinin boyu

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t})\| = \|\dot{\gamma}(t)\| \left|\frac{dt}{d\tilde{t}}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{UYARI}(*)}}{>} 0$$

olduğundan $\tilde{\gamma}$ düzenlidir.

Ör: $\gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (t, t^2)$

$\tilde{\gamma} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \quad \tilde{\gamma}(\tilde{t}) = (\tilde{t}^3, \tilde{t}^6)$ $\Big\}$ $t = \tilde{t}^3 = \phi(\tilde{t})$

eğrileri birbirinin reparametrizasyonu idi.

$$\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(t) \iff \underline{(\tilde{t}^3, \tilde{t}^6) = (t, t^2)}$$

Her iki tarafın t'ye göre türevini alırken $\tilde{t} = t^{1/3}$ olduğunu kullanırız:

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} = (3\tilde{t}^2, 6\tilde{t}^5)\, \frac{1}{3} t^{-2/3} = \underbrace{(1, 2t)}_{\dot{\gamma}(t)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} t^{-2/3}}_{\text{sayı}} \underbrace{(3\tilde{t}^2, 6\tilde{t}^5)}_{\text{hız vektörü}} = \underbrace{(1, 2t)}_{\text{hız vektörü}}$$

$$\underbrace{0 \neq \quad \text{ve} \quad (0,0) \neq \quad \Longleftarrow \quad \neq (0,0)}_{\text{Önermenin ispatındaki mantık}}$$

NOT: 1) Bu örnekte, $\tilde{\gamma}$'nın düzenli olduğunu doğrudan görebilirdik, çünkü $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = (\tilde{t}^3, \tilde{t}^6)$ olduğunu biliyoruz: $\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} = (3\tilde{t}^2, 6\tilde{t}^5) \neq (0,0)$ $(\tilde{t} > 0)$

Amacımız, $\tilde{\gamma}$'nın formülünü bilmeden düzenli olduğunu görmekti.

2) Önerme 1.3 ve örnekteki düzenli eğrinin hız vektörü ile reparametrizasyonunun hız vektörünün birbirinin sıfırdan farklı bir katı olduğu görülüyor;

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{t}}{dt} \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} \quad \text{ve} \quad \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}} = \frac{dt}{d\tilde{t}} \frac{d\gamma}{dt} \quad (\text{Bkz. UYARI } (*))$$

3) Reparametrizasyon bulmanın iyi bir yolu tersinir, düzgün ve tersi düzgün bir $\tilde{t} = \phi^{-1}(t)$ fonksiyonu bulmaktır, çünkü bu durumda $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$'yı $\gamma(t)$'de t yerine $\phi(\tilde{t})$ koyarak bulabiliriz.

Örneğin, $\tilde{t} = \phi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ düzgün, tersinir ve tersi $t = \tilde{t}^3$ düzgün ϕ^{-1} fonksiyonu, bize $\gamma(t) = (t, t^2)$ eğrisinin $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) := \gamma(\tilde{t}^3) = (\tilde{t}^3, \tilde{t}^6)$ reparametrizasyonunu verir.

Soru: Acaba $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}(u)\| du$ yay-uzunluğu fonksiyonu düzgün mü? $\phi^{-1} = s$ alabilirmiyiz?

Önerme 1.4 Eğer γ düzenli ise s yay-uzunluğu fonksiyonu düzgündür.

İspat: $s'(t) \underset{\uparrow}{=} \|\dot{\gamma}(t)\|$ olduğunu biliyoruz
Kalkülüsün Temel Teoremi

Amacımız s'nin her mertebeden türevi olduğunu görmek. Genelliği bozmadan γ'nın düzlem eğrisi olduğunu kabul edip işimizi kolaylaştıralım. $\gamma(t)=(u(t),v(t))$ şeklinde olsun.

düzgün

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ dersek

$s'(t)=\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}=f(\dot{u},\dot{v})$ olur.

$$\Rightarrow s''(t)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\dot{u}}}_{\frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}}}\cdot\ddot{u}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\dot{v}}}_{\frac{\dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}}}\cdot\ddot{v}$$

Zincir Kuralı: $t\to(\underset{x}{\dot{u}(t)},\underset{y}{\dot{v}(t)})\to\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{f}$

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\dot{u}}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=\dot{v}}\frac{dy}{dt}$$ şeklindedir.

γ düzenli old. için $(\dot{u}(t),\dot{v}(t))=\dot{\gamma}(t)\neq(0,0)$'dır.

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ fonksiyonları

$(x,y)\neq(0,0)$ için tanımlıdır.

Bu yüzden, her t için, $s''(t)$ tanımlıdır. Diğer türevlerinin de varlığı f fonksiyonunun ve γ'nın düzgün olmasının bir sonucudur. $\square$

Uyarı: TERS fonksiyon teoremi, $s:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ için $\boxed{\frac{ds}{dt}\neq 0}$ iken s'nin 1-1 olduğunu, $s(\alpha,\beta)$ görüntü kümesinin açık aralık olduğunu ve s^{-1}'in de düzgün olduğunu söyler. Bu yüzden, $\frac{ds}{dt}\neq 0$ iken $\underline{\phi = s^{-1}}$ alarak reparametrizasyon elde edilebilir.

$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$ olduğundan γ düzenli iken

$\frac{ds}{dt} > 0$ olur ki bu durumda yay-uzunluğu fonksiyonunu kullanarak reparametrizasyon bulabiliriz.

Önerme 1.5 γ düzenlidir $\Rightarrow$ γ'nın yay-uzunluğuna göre reparametrizasyonu birim hızlıdır.

İspat: γ düzenli ise Önerme 1.4 ve devamındaki Uyarı'dan $\tilde{t} = \phi^{-1}(t) = s(t)$ yay-uzunluğu fonksiyonu $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(\tilde{t}) = \gamma(t)$ reparametrizasyonunu verir.

$\tilde{\gamma}(s)=\gamma(t)$'nin t'ye göre türevini alırsak,

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{ds}{dt}}}_{=\|\dot{\gamma}(t)\|>0}=\dot{\gamma}(t)\Rightarrow\underbrace{\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}=\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\Big\}\text{ birim vektör}}_{\tilde{\gamma}\text{ birim-hızlı}}$$

$\square$

Önerme 1.6 γ'nın birim-hızlı bir reparametrizasyonu varsa γ düzenlidir ve bu reparametrizasyonda kullanılan parametre $u(t)=\phi^{-1}(s)$ ise s yay uzunluğu olmak üzere $u(t)=\pm s(t)+c$ $(c\in\mathbb{R})$ şeklindedir.

İspat: $\tilde{\gamma}(u)=\gamma(t)$, birim-hızlı bir reparametrizasyon ise $\left\|\frac{d\tilde{\gamma}}{du}\right\|=1$, yani $\tilde{\gamma}$ düzenlidir. γ eğrisi $\tilde{\gamma}$'nın bir reparametrizasyonu olduğu için γ da düzenlidir, çünkü

$$\|\dot{\gamma}(t)\|=\left\|\frac{d\tilde{\gamma}}{du}\right\|\cdot\left|\frac{du}{dt}\right|=\left|\frac{du}{dt}\right|\underbrace{>0}_{\text{UYARI}(*)}\text{'dir.}$$

Bu yüzden, $\frac{ds}{dt}=\|\dot{\gamma}(t)\|=\pm\frac{du}{dt}$ ve dolayısıyla

$\boxed{u(t)=\pm s(t)+c}$ olduğunu görürüz.

$\square$

Örnek: $\gamma(t)=(2\cos t, 2\sin t)$ yarıçapı 2 olan bir çemberin parametrizasyonu olsun. γ'nın hızı

$$\|\dot\gamma(t)\| = \|(-2\sin t, 2\cos t)\| = \sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)} = 2 \neq 0$$

olduğundan γ düzenlidir ancak birim-hızlı değildir.

Birim-hızlı bütün reparametrizasyonları:

$$s(t)=\int_0^t \|\dot\gamma(u)\|\,du = \int_0^t 2\,du = 2u\Big|_0^t = 2t \Rightarrow \text{yay-uzunluğu}$$

$$u(t) = \mp s(t)+c = \mp 2t + c \Rightarrow t = \frac{u-c}{\mp 2} = \mp\frac{u}{2} \underbrace{\pm\frac{c}{2}}_{d}$$

olur. $t=\mp\frac{u}{2}+d$ $(d\in\mathbb{R})$ elde edilir.

$$\tilde\gamma(u) = \gamma(t) = \gamma\left(\mp\frac{u}{2}+d\right) = \left(2\cos\left(\mp\frac{u}{2}+d\right), 2\sin\left(\mp\frac{u}{2}+d\right)\right)$$

formülü her $d\in\mathbb{R}$ için γ'nın birim hızlı ($-$'li ve $+$'lı) iki reparametrizasyonunu verir.

Özel olarak, $u=s$ ve $d=0$ için

$\tilde\gamma(s) = \left(2\cos\left(\frac{s}{2}\right), 2\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$ yay-uzunluğuna göre yapılan birim-hızlı reparametrizasyondur.

Sonuç 1.7 γ düzenlidir $\Leftrightarrow$ birim-hızlı reparametrizasyonları vardır ve bunlar yay-uzunluğundan elde edilir.

2) γ düzenli değildir $\Leftrightarrow$ birim hızlı reparametrizasyonu yoktur.

İspat: γ düzenli $\xRightarrow{\text{Önerme 1.5}}$ γ'nın birim-hızlı reparametrizasyonu var — yay-uzunluğu verir

$\xLeftarrow{\text{Önerme 1.6}}$

Yani, γ'nın birim-hızlı bir reparametrizasyona sahip olması ile düzenli olması aynı anlama gelir ve bu durumda Önerme 1.6'dan dolayı bütün birim-hızlı reparametrizasyonlar yay-uzunluğundan elde edilir. $\square$

Uyarı: γ düzenli olsa bile yay-uzunluğu fonksiyonu karmaşık olabilir ve $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$'nin formülünü bulmak (ÇOK) zor olabilir.

Örnek: $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{2}e^t$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}e^u\,du = \sqrt{2}\,e^u\Big|_0^t = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}$$ olur.

$t = \ln\left(\frac{s+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)$'yi $\gamma(t)$'de yerine koyunca

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right)\right)$$

elde edilir.

Ör: $\gamma(t)=(t,t^2) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$

$s(t)=\int_0^t \sqrt{1+4u^2}\,du = ?$ $\quad 2u=\tan\theta \Rightarrow 2du=\sec^2\theta\, d\theta$

$\sqrt{1+4u^2}=\sec\theta$

$$\int\sqrt{1+4u^2}\,du=\frac{1}{2}\int\sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int \overbrace{\sec\theta}^{u}\cdot \overbrace{d(\tan\theta)}^{dv}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4u^2}\cdot 2u+\ln\left(\sqrt{1+4u^2}+2u\right)\right]+c$$

$$s(t)=t\sqrt{1+4t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+4t^2}+2t\right)=\phi^{-1}(t)$$

$\tilde{\gamma}(s)$'yi bulmak için $t=\phi(s)$'yi bulmalıyız

ama ÇOK zor!

Öte yandan $\gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,t^2)$'nin bir reparametrizasyonu $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=(\tilde{t}^3,\tilde{t}^6)$ idi

ancak $\left\|\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tilde{t}}\right\|=\|(3\tilde{t}^2,6\tilde{t}^5)\|=3\|(\tilde{t}^2,2\tilde{t}^5)\|=3\sqrt{\tilde{t}^4+4\tilde{t}^{10}}$

olduğundan $\tilde{\gamma}$ birim-hızlı değildir.

NOT: $\gamma:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,t^2)$, $y=x^2$'nin düzenli; $\tilde{\gamma}:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=(\tilde{t}^3,\tilde{t}^6)$ ise düzenli-olmayan parametrizasyonudur.

Alıştırmalar

1) $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ eğrisi düzenli mi?

2) Yukarıdaki eğrinin birim-hızlı bir reparametrizasyonu var mı? Varsa, kaç tane? Hepsini bulabilir misiniz?

3) Yukarıdaki eğrinin $s(t)$ yay-uzunluğu fonksiyonu nedir? ($t=0$'dan başlayanı bulunuz.)

4) $\tilde{\gamma}(\tilde{t}) = (\cos \tilde{t}, \sin \tilde{t})$, γ'nın bir reparametrizasyonu mudur?

5) Yukarıdaki $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ birim-hızlı mıdır?

2. BÖLÜM:

BİR EĞRİ NE KADAR EĞRİLİR?

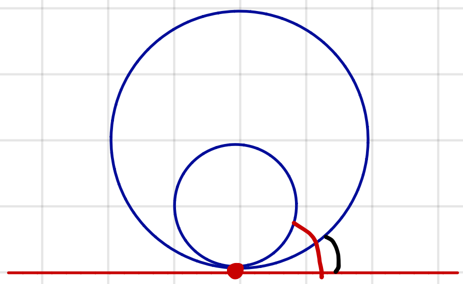
2.1 Eğrilik:

Amacımız bir eğrinin eğrilik miktarını ölçmek. Bu, eğrinin şekliyle ilgili, nasıl oluştuğuyla ilgili değil. Dolayısıyla, eğrilik kavramı aşağıdaki özelliklere sahip olmalı.

i) Reparametrizasyondan bağımsız olmalı,

ii) Doğru üzerindeki eğrilerin eğriliği sıfır olmalı,

iii) Çemberin yarıçapı arttıkça eğriliği azalmalı.



Küçük çemberin doğrudan sapma miktarı daha fazla!

İkinci özellik ve Önerme 1.1 tanım hakkında bir fikir veriyor: $\|\ddot{\gamma}(t)\|$ sayısı $\gamma(t)$ noktasındaki eğrilik olarak tanımlansa Önerme 1.1.'den dolayı $\|\ddot{\gamma}(t)\|=0,\ \forall t\in(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \gamma(t)$ doğru üzerindedir.

Ancak bu tanım reparametrizasyona bağlı:

$\gamma(t)=(\cos 2t, \sin 2t)$ ve $\tilde{\gamma}(s)=(\cos s, \sin s)$

birim çemberin iki parametrizasyonu, hatta

birbirinin reparametrizasyonu $t=\frac{s}{2}=\phi(s)$!

Fakat, $\|\ddot{\gamma}\|=4$ iken $\|\ddot{\tilde{\gamma}}\|=1$ 'dir.

Yeni birinci özellik sağlanmaz.

γ'nın birim-hızlı bütün reparametrizasyonları:

$u=\mp s+c=\mp 2t+c \Rightarrow s=\mp u+c'$ 'den

$\delta(u)=(\cos(\mp u+c'), \sin(\mp u+c'))$ şeklindedir.

$\dot{\delta}(u)=(\pm\sin(\mp u+c'), \mp\cos(\mp u+c'))$ ve

$\ddot{\delta}(u)=(\pm\cos(\mp u+c'), \pm\sin(\mp u+c')) \Rightarrow \|\ddot{\delta}(u)\|=1$.

(i') Eğrilik tanımı birim-hızlı reparametrizasyondan bağımsızdır.

Tanım: γ düzenli ve birim hızlı bir reparametrizasyonu $\tilde{\gamma}$ ise γ'nın $\gamma(t)$'deki eğriliği, $\|\ddot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t})\|$ sayısı olarak tanımlanır ve $\kappa(t)$ ile gösterilir.

Uyarı: $\kappa(t)\neq\|\ddot{\gamma}(t)\|$ olabilir, bkz. yukarıdaki örnek!

İddia: (i'), (ii) ve (iii) özellikler sağlanır.

Kanıt: (i') γ'nın birim hızlı bir reparametrizasyonu $\tilde{\gamma}(u)$ olsun. $u = \mp s + c$ olduğunu biliyoruz.

İddiamız $\delta(s)$ yay-uzunluğuna göre reparametrizasyon ise $\kappa(t) = \|\ddot{\delta}(s)\| = \|\ddot{\tilde{\gamma}}(u)\|$ olduğudur.

$$\delta(s) = \tilde{\gamma}(u) \Rightarrow \frac{d\delta}{ds} = \frac{d\tilde{\gamma}}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \mp \frac{d\tilde{\gamma}}{du}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\delta}{ds^2} = \mp \frac{d}{ds}\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{du}\right) = \mp\left[\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2} \cdot \underbrace{\frac{du}{ds}}_{\mp 1}\right] = \frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}$$

$$\Rightarrow \|\ddot{\delta}(s)\| = \|\ddot{\tilde{\gamma}}(u)\|.$$

(ii) $\gamma(t) = (a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b_n) \Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 1$ ise

$$\delta(s) = \gamma\left(\frac{1}{a} \cdot s\right) \Rightarrow \dot{\delta}(s) = (1, \ldots, 1) \Rightarrow \ddot{\delta}(s) = \vec{0} \Rightarrow \kappa(s) = 0 \;\checkmark$$

(iii) Merkezi (x_0, y_0) yarıçapı R olan çemberin birim-hızlı bir parametrizasyonu şu şekildedir:

$$\gamma(s) = \left(x_0 + R\cos\left(\frac{s}{R}\right), y_0 + R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right).$$

$$\dot{\gamma}(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) \Rightarrow \ddot{\gamma}(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

Dolayısıyla, $\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \frac{1}{R}$ olur.

Önerme 2.1 $\gamma:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^3$ düzenli bir eğri ise eğriliği $\kappa(t)=\dfrac{\|\ddot{\gamma}(t)\times\dot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$'dir.

İspat: $\delta(s)=\gamma(t)$ yay-uzunluğuna göre reparam. ise $\dot{\delta}(s)\cdot\dfrac{ds}{dt}=\dot{\gamma}(t)\Rightarrow\dot{\delta}(s)=\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{ds/dt}\Rightarrow\ddot{\delta}(s)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{\gamma}(t)}{ds/dt}\right)\cdot\dfrac{dt}{ds}$

$$\Rightarrow\ddot{\delta}(s)=\left(\frac{\ddot{\gamma}(t)\frac{ds}{dt}-\dot{\gamma}(t)\frac{d^2s}{dt^2}}{(ds/dt)^2}\right)\frac{dt}{ds}=\frac{\ddot{\gamma}\frac{ds}{dt}-\dot{\gamma}\frac{d^2s}{dt^2}}{(ds/dt)^3}\quad(*)$$

$\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2=\|\dot{\gamma}\|^2=\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}$ ifadesinin t'ye göre türevi:

$$2\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)+\dot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t)=2\,\dot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t)$$

$\Rightarrow\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d^2s}{dt^2}=\dot{\gamma}(t)\cdot\ddot{\gamma}(t)$ olur.

$$(*)\Rightarrow\kappa=\|\ddot{\delta}\|=\left\|\frac{\ddot{\gamma}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\dot{\gamma}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}}{(ds/dt)^4}\right\|=\frac{\|\ddot{\gamma}(\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma})-\dot{\gamma}(\dot{\gamma}\cdot\ddot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}$$

$\Rightarrow\kappa=\dfrac{\|\dot{\gamma}\times(\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma})\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}$, çünkü $u\times(v\times w)=v(u\cdot w)-w(u\cdot v)$.

$\Rightarrow\dot{\gamma}\perp\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}$ olduğundan $\|\dot{\gamma}\times(\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma})\|=\|\dot{\gamma}\|\,\|\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}\|$ olur.

Dolayısıyla, $\kappa=\dfrac{\|\dot{\gamma}\|\,\|\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^4}=\dfrac{\|\ddot{\gamma}\times\dot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$.

Alternatif kanıt: $\delta(s) = \gamma(t)$ birim-hızlı reparametrizasyon olsun. $\kappa(t) := \kappa(s)$ olarak tanımlanmıştı.

$$\dot{\delta}(s)\frac{ds}{dt} = \dot{\gamma}(t) \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|\,\dot{\delta}(s) \text{ olur.}$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{d\,\|\dot{\gamma}(t)\|}{dt}\,\dot{\delta}(s) + \|\dot{\gamma}(t)\|\,\ddot{\delta}(s)\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=\|\dot{\gamma}\|}$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{d\,\|\dot{\gamma}(t)\|}{dt}\,\dot{\delta}(s) + \|\dot{\gamma}(t)\|^2\,\ddot{\delta}(s) \text{ olur.}$$

$\dot{\delta}\times\dot{\delta} = 0$ olduğundan $\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} = \|\dot{\gamma}\|^3\,\dot{\delta}\times\ddot{\delta}$ olur.

Böylece, $\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\| = \|\dot{\gamma}\|^3\,\|\dot{\delta}\times\ddot{\delta}\|$ elde edilir.

Dolayısıyla, $\dfrac{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \|\dot{\delta}\times\ddot{\delta}\| = \kappa(s) = \kappa(t)$

olur, çünkü $\|\dot{\delta}\| = 1$ ve $\dot{\delta}\perp\ddot{\delta}$ olduğundan,

$$\|\dot{\delta}\times\ddot{\delta}\| = \|\dot{\delta}\|\cdot\|\ddot{\delta}\|\cdot\sin\pi/2 = \|\ddot{\delta}\| = \kappa \text{ olur.}$$

Uyarı: $\gamma:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^2$ düzenli bir eğri ise
$t\to(f(t),g(t))$

$\tilde{\gamma}:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^3$, $\tilde{\gamma}(t)=(f(t),g(t),0)$ da düzenlidir ve $\tilde{\gamma}$ ile γ'nın eğrilikleri aynıdır:

$\gamma(t)=(f(t),g(t))\subseteq\mathbb{R}^2$ düzenli ise

$\dot{\gamma}(t)=(\dot{f}(t),\dot{g}(t))\neq(0,0)$ olur. Bu yüzden,

$\dot{\tilde{\gamma}}(t)=(\dot{f}(t),\dot{g}(t),0)\neq(0,0,0)$ yani $\tilde{\gamma}$ düzenlidir.

$$s(t)=\int_0^t\|\dot{\gamma}(u)\|du=\int_0^t\|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\|du=\tilde{s}(t)$$ ve

$s=s(t)=\phi^{-1}(t)\iff t=\phi(s)$ olduğundan

$\delta(s)=\gamma(\phi(s))=(f(\phi(s)),g(\phi(s)))$ ve

$\tilde{\delta}(s)=\tilde{\gamma}(\phi(s))=(f(\phi(s)),g(\phi(s)),0)$ olur.

Dolayısıyla, $F=f\circ\phi$ $G=g\circ\phi$ dersek,

$\ddot{\delta}(s)=(\ddot{F}(s),\ddot{G}(s))$ iken

$\ddot{\tilde{\delta}}(s)=(\ddot{F}(s),\ddot{G}(s),0)$ olur.

Sonuç olarak, $\underbrace{\|\ddot{\delta}\|}_{\kappa(s)}=\underbrace{\|\ddot{\tilde{\delta}}\|}_{\tilde{\kappa}(s)}$ elde edilir.

Ör: $\gamma(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$'nin eğriliğinin $\frac{1}{R}$ olduğunu görmüştük.

$\tilde{\gamma}(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t, 0)$'a Önerme 2.1'i uygulayalım: $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$ ve $\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = (-R\cos(t), -R\sin(t), 0)$ olduğundan

$$\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin t & R\cos t & 0 \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, R^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}}\|}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R} \; //$$

Ör: $\gamma(t) = (t, t^2)$ veya $\gamma(t) = (t, t^2, 0)$'ın eğriliğini bulalım: $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t, 0)$ $\ddot{\gamma}(t) = (0, 2, 0)$

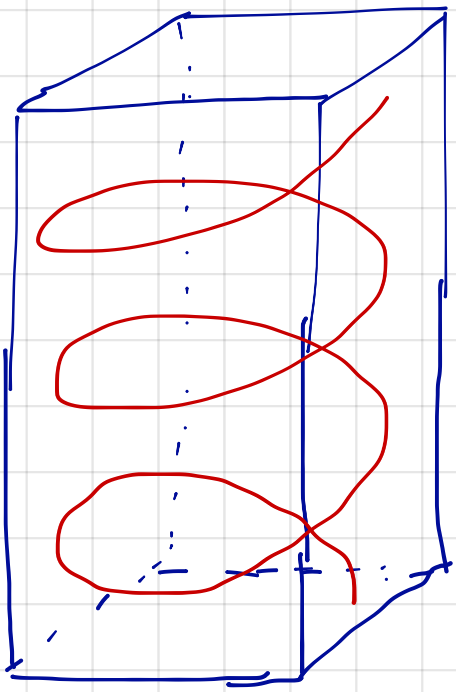
$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{k}$$

$\Rightarrow \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = 2.$

$\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ olduğundan $\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$ olur.

Örnek: $\underbrace{\gamma(\theta)}=(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)\,, \quad \theta\in(-\infty,\infty)$

Her $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ikilisi bir "çembersel helis" veriyor.



Dikkat: $\left.\begin{array}{l} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{array}\right\}$, $\underbrace{x^2+y^2=a^2}_{\text{silindir (yüzeyi)}}$

$|a| \to$ helisin yarıçapı.

$$\dot\gamma(\theta)=(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)$$

$$\ddot\gamma(\theta)=(-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$$

$$\dot\gamma\times\ddot\gamma=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0\end{vmatrix}=(ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2)$$

$$\kappa(s)=\frac{\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{|a|}{a^2+b^2} \;//$$

$b=0$ iken $\gamma(\theta)$ helisi, yarıçapı $|a|$ olan çember olurdu ve bu formül $\dfrac{1}{|a|}$ halini alıyor!

Alıştırma: Aşağıdaki eğrilerin eğriliğini bulunuz:

1) $\gamma(t)=\left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

2) $\gamma(t)=\left(\frac{4}{5}\cos t, 1-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$

3) $\gamma(t)=(\cos^3 t, \sin^3 t)$

2.2 Düzlem Eğrileri ve İşaretli Eğrilik

Düzlem eğrileri için eğrilik kavramını rafineleştirmek ve ona daha cazip bir geometrik yorum katmak mümkündür.

$\gamma(s)$ birim-hızlı bir düzlem eğrisi olsun. $\vec{t} = \dot{\gamma}$ teğet vektörü (her noktada) birim vektördür. $\vec{t}$'ye dik 2 birim vektör vardır. Bunlardan, $\vec{t}$'nin saat yönüne ters $\pi/2$ radyan döndürülmesiyle elde edilenine işaretli birim normal denir ve $\vec{n}_i$ ile gösterilir.

Önerme 1.2'den dolayı $\dot{\vec{t}} = \ddot{\gamma}$ ile $\vec{t}$ diktir.

Demek ki, $\ddot{\gamma} = \kappa_i \vec{n}_i$ olacak bir $\kappa_i \in \mathbb{R}$ var.

Bu κ_i'ye γ'nın işaretli eğriliği denir. $\ddot{\gamma}$ ile $\vec{n}_i$ aynı yönlü iken $\kappa_i > 0$ ters yönlüyken $\kappa_i < 0$'dır.

$\ddot{\gamma}(s) = 0 \iff \kappa_i(s) = 0$ olduğu da açıktır.

γ birim-hızlı olduğu için $\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = |\kappa_i|$, yani $\kappa_i = \kappa$ veya $\kappa_i = -\kappa$'dır.

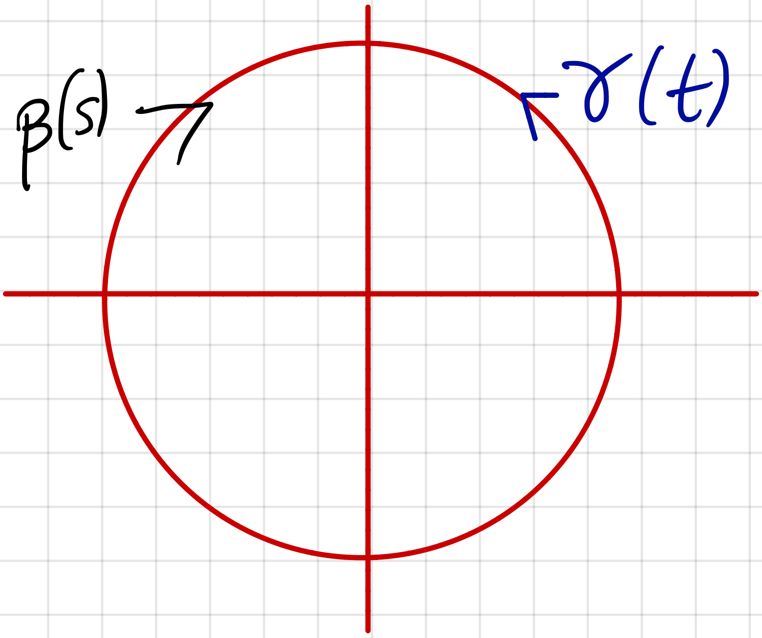
Örnek: $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\varkappa}\cos(\varkappa t), \frac{1}{\varkappa}\sin(\varkappa t) \right)$, $\varkappa \in \mathbb{R}$ sabit.

$$\dot{\gamma}(t) = \left(-\sin(\varkappa t), \cos(\varkappa t) \right) = (x, y)$$

$$\vec{n_i} = (-y, x) = \left(-\cos(\varkappa t), -\sin(\varkappa t) \right)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(-\varkappa\cos(\varkappa t), -\varkappa\sin(\varkappa t) \right) = \varkappa \, \vec{n_i}$$

$\Rightarrow$ $\varkappa_i = \varkappa$ olur.



$$\beta(s) = \gamma(-s) = \left(\frac{1}{\varkappa}\cos(-\varkappa s), \frac{1}{\varkappa}\sin(-\varkappa s) \right)$$

$$\dot{\beta}(s) = \left(\sin(-\varkappa s), -\cos(-\varkappa s) \right)$$

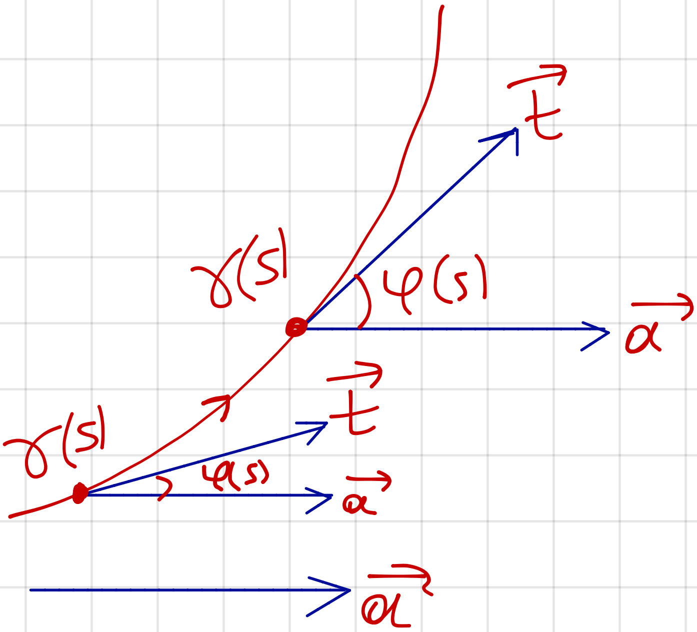
$$\vec{n_i} = \left(\cos(-\varkappa s), \sin(-\varkappa s) \right)$$

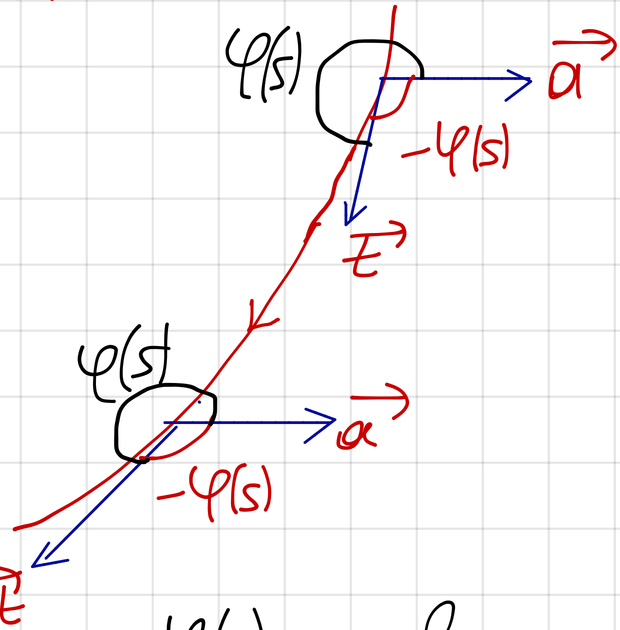
$$\ddot{\beta}(s) = \left(-\varkappa\cos(-\varkappa s), -\varkappa\sin(-\varkappa s) \right) = -\varkappa \, \vec{n_i}$$

$\varkappa_i = -\varkappa$ olur.

Önerme 2.2 $\gamma(s)$ birim-hızlı düzlem eğrisi olsun. Sabit bir birim vektörün, saat-yönüne ters döndürülmesiyle teğet vektörün elde edilmesi için gerekli açı $\varphi(s)$ ise işaretli eğrilik $\boxed{\kappa_i = \frac{d\varphi}{ds}}$'dir.

Yorum: Demek ki, işaretli eğrilik teğet vektörünün dönme oranıdır.



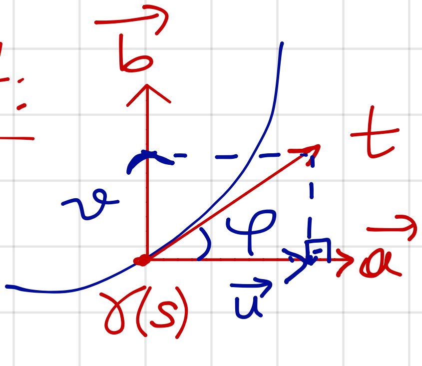


$\varphi(s)$ artıyor $\Rightarrow \kappa_i = \frac{d\varphi}{ds} > 0$

$\varphi(s)$ azalıyor

$\kappa_i = \frac{d\varphi}{ds} < 0$ olur.

İspat:



$\vec{a}$ sabit birim vektör

$\vec{b}$, $\vec{a}$'nın saat yönünün tersine $\pi/2$ dönmesiyle elde edilen vektör.

Bu durumda, $\|\vec{u}\| = \cos\varphi$, $\|v\| = \sin\varphi$ olduğundan

$$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} = \cos\varphi\,\vec{a} + \sin\varphi\,\vec{b}$$ olur.

s'ye göre türev alırsak,

$\dot{\vec{t}} = \left(-\sin\varphi\, \vec{a} + \cos\varphi\, \vec{b}\right)\dfrac{d\varphi}{ds}$ olur. $\vec{a}$ ile iç

çarpım $\dot{\vec{t}}\cdot\vec{a} = \left(-\sin\varphi\, \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{1} + \cos\varphi\, \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{0}\right)\dfrac{d\varphi}{ds}$

$\dot{\vec{t}}\cdot\vec{a} = -\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{ds}$ eşitliğini verir.

$(\kappa_i \vec{n_i})\cdot\vec{a} = -\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{ds}$

$\vec{n_i}$ ile $\vec{a}$ arasındaki açı $\dfrac{\pi}{2}+\varphi$ olduğundan

$\vec{n_i}\cdot\vec{a} = \|\vec{n_i}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi$

ve dolayısıyla $\kappa_i(-\sin\varphi) = (-\sin\varphi)\dfrac{d\varphi}{ds}$ olur.

Teorem 2.1 $k:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ düzgün fonksiyon ise işaretli eğriliği k olan birim hızlı bir γ eğrisi vardır. Dahası, işaretli eğriliği k olan başka bir $\tilde{\gamma}:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^2$ eğrisi varsa $\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s))$ olacak şekilde bir $M:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ katı hareketi vardır. (Katı hareketi = dönme + öteleme)

Hatırlatma: $T_{\vec{a}}$ ötelemesi $T_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{v}+\vec{a}$ ve

R_θ dönmesi $R_\theta(x,y) = (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y,\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$ dir.

saat-yönüne ters

İspat: $s_0 \in (\alpha,\beta)$ sabiti ve $s \in (\alpha,\beta)$ için

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du \quad \text{ve} \quad \gamma(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)\,dt \right)$$

dersek $\dot{\gamma}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$ teğet vektörü x-ekseniyle arasında $\varphi(s)$ radyan açı olan bir birim vektör olur.

Dolayısıyla, γ, işaretli eğriliği, Önerme 2.2'den, $\kappa_i = \kappa$ olan birim-hızlı bir eğridir.

İkinci kısım için, $\tilde{\gamma}$ işaretli eğriliği κ olan birim-hızlı başka bir eğri olsun. $\dot{\tilde{\gamma}}$ teğet vektörünün x-ekseniyle (yani $\vec{a} = (1,0)$ vektörüyle) arasındaki açıya $\tilde{\varphi}(s)$ dersek $\dot{\tilde{\gamma}}(s) = (\cos\tilde{\varphi}(s), \sin\tilde{\varphi}(s))$ olur. İntegral alırsak,

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\tilde{\varphi}(t)\,dt, \int_{s_0}^{s} \sin\tilde{\varphi}(t)\,dt \right) + \underbrace{\tilde{\gamma}(s_0)}_{\text{sabit vektör}}$$

Önerme 2.2'den $\dfrac{d\tilde{\varphi}}{ds} = \kappa(s)$'dir. İntegral alırsak,

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du + \underbrace{\tilde{\varphi}(s_0)}_{\text{sabit sayı}} = \underline{\underline{\varphi(s)}} + \underbrace{\tilde{\varphi}(s_0)}_{\text{dönme açısı}}$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}(s) = T_{\tilde{\gamma}(s_0)} \circ R_{\tilde{\varphi}(s_0)} (\gamma(s)) = M(\gamma(s)) \text{ olur.}$$

$\square$

Ör: Eğriliği sabit bir pozitif reel sayı olan düzenli her düzlem eğrisi bir çemberde yatar.

γ'nın eğriliği $\kappa > 0$ sabiti ise $\kappa_i(s) = \mp\kappa$ dur. $\kappa_i(s)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan ya $\kappa_i(s) = \kappa$ ya da $\kappa_i(s) = -\kappa$'dır.

$\kappa_i(s) = \mp\kappa$ ise $\varphi(s) = \int_0^s \mp\kappa\, du = \mp\kappa s$

$$\gamma_{\mp}(s) = \left(\int_0^s \cos(\mp\kappa t)dt, \int_0^s \sin(\mp\kappa t)dt \right)$$

$$\gamma_{\mp}(s) = \left(\frac{1}{\mp\kappa} \sin(\mp\kappa s), \pm\frac{1}{\kappa} \cos(\mp\kappa s) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa s), \pm\frac{1}{\kappa} \cos(\kappa s) \right)$$ birim hızlı ve

$x^2 + y^2 = (1/\kappa)^2$ çemberi üzerinde yatan iki eğridir. Teo 2.1'den γ_+'nın işaretli eğriliği κ, γ_-'ninki ise $-\kappa$'dır. Yine aynı teoremden işaretli eğriliği κ_i olan bütün eğriler γ_+ veya γ_-'den katı hareketlerle elde edileceğinden hepsi bir çemberde yatmak zorunda.

Mesela, $\gamma_+(s) = (\sin s, -\cos s)$, $s \in (0, 2\pi)$

ise $\vec{t} = \dot{\gamma}_+ = (\cos s, \sin s)$ ve $\dot{\vec{t}} = (-\sin s, \cos s)$.

$\vec{t}$'yi 90° saat yönüne ters döndürürsek,

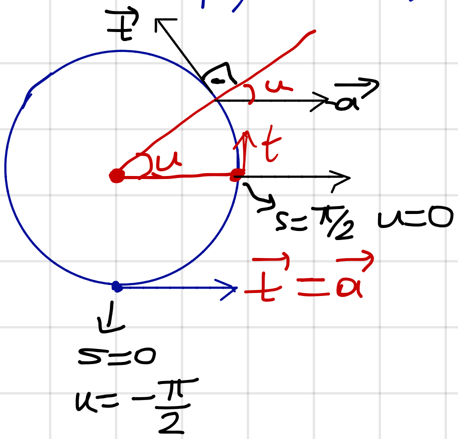
$$R_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = \left(\cos\frac{\pi}{2}x - \sin\frac{\pi}{2}y,\ \sin\frac{\pi}{2}x + \cos\frac{\pi}{2}y\right) = (-y, x)$$

formülünden, $\vec{n_i} = R_{\frac{\pi}{2}}(\vec{t}) = (-\sin s, \cos s)$ bulunur.

$\dot{\vec{t}} = \kappa_i \vec{n_i}$ olduğundan $\kappa_i = 1$ olduğu görülür.

$\vec{t}$ ile $\vec{a} = (1,0)$ arasındaki açı $\varphi(s) = \arccos\left(\frac{\vec{t}\cdot\vec{a}}{\|t\|\cdot\|a\|}\right) = s$'dir.

2. yol.



$\gamma_+ = (\sin s, -\cos s) = (\cos u, \sin u) = \gamma(u)$

$\Updownarrow$

$$\boxed{s = u + \frac{\pi}{2}}$$

$\vec{t}$ ile $\vec{a}$ arasındaki açı, $\varphi(s) = s$.

$\varphi(s)$'nin s'ye göre türevi, $\kappa_i = 1$'i verir.

Benzer şekilde, $\gamma_-(s) = (\sin s, \cos s)$ için

$\vec{t} = \dot{\gamma}_- = (\cos s, -\sin s)$ ve $\dot{\vec{t}} = (-\sin s, -\cos s)$.

$R_{\frac{\pi}{2}}(\vec{t}) = (\sin s, \cos s) = \vec{n_i}$ olur.

Buradan, $\dot{\vec{t}} = \kappa_i \vec{n_i}$ olan $\kappa_i = -1$ bulunur.

2. yol: $(\cos u, \sin u) = (\sin s, \cos s) \iff u = -s + \frac{\pi}{2}$.

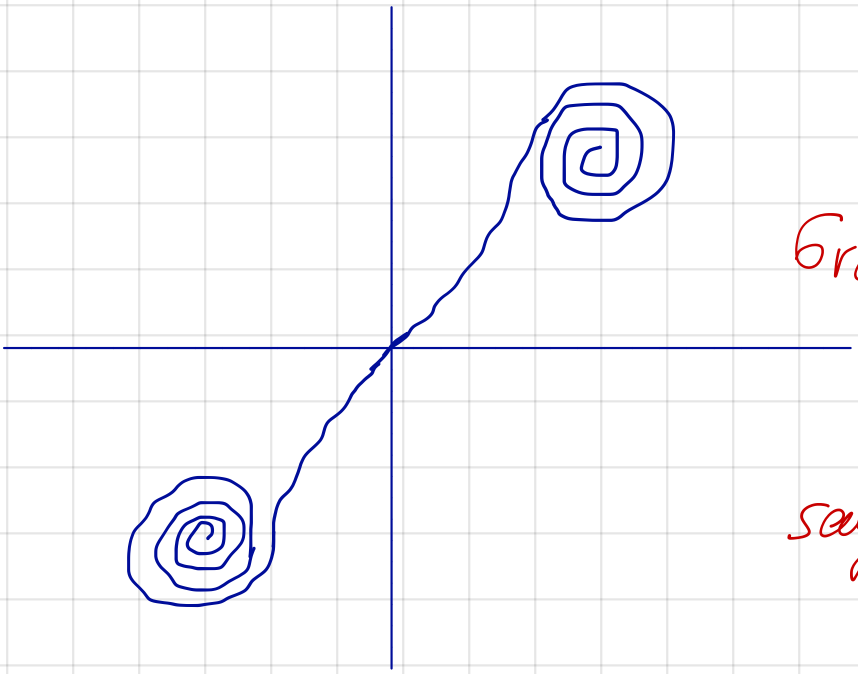
Ör: (Theorem 2.1'in ispatındaki fikirle eğriyi bulamayabiliriz)

$\kappa_i(s) = s$ olan eğri?

$$\varphi(s) = \int_0^s u\,du = \frac{s^2}{2}$$

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right)dt, \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)dt \right)$$

bu integralleri temel fonksiyonlar cinsinden bulamayız. Bunlara Fresnel integralleri, γ'ya da Cornu spirali denir.



Grafik integralin nümerik hesaplanması sayesinde çiziliyor.

UYARI: Teorem 2.1'in ikinci kısmı eğrilik için geçerli değildir. $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$ ile $\tilde{\gamma} : (0,1) \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(s) = (s, -s^2)$ eğrilerini ele alalım.

$\gamma(t)=(t,t^2)$ eğrisini "uzaya gömüp" $\gamma(t)=(t,t^2,0)$ diyelim. $\dot{\gamma}=(1,2t,0)$ ve $\ddot{\gamma}=(0,2,0)$ olur.

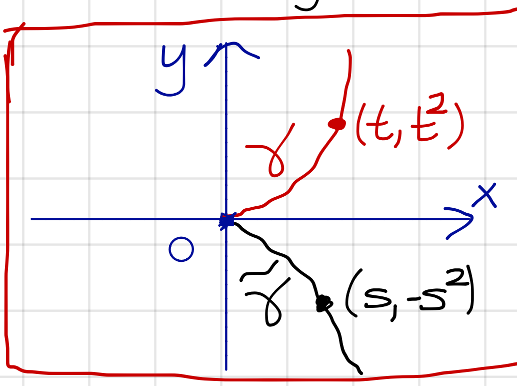
$$\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,2) \text{ ve } \|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|=2.$$

$\|\dot{\gamma}\|=\sqrt{1+4t^2}$ olduğundan $\kappa(t)=\dfrac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$ olur.

Öte yandan, benzer şekilde $\tilde{\gamma}(s)=(s,-s^2,0)$ ise $\dot{\tilde{\gamma}}=(1,-2s,0)$, $\ddot{\tilde{\gamma}}=(0,-2,0)$ ve $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|=\sqrt{1+4s^2}$ olur.

$$\dot{\tilde{\gamma}}\times\ddot{\tilde{\gamma}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2s & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,-2)$$ olduğundan

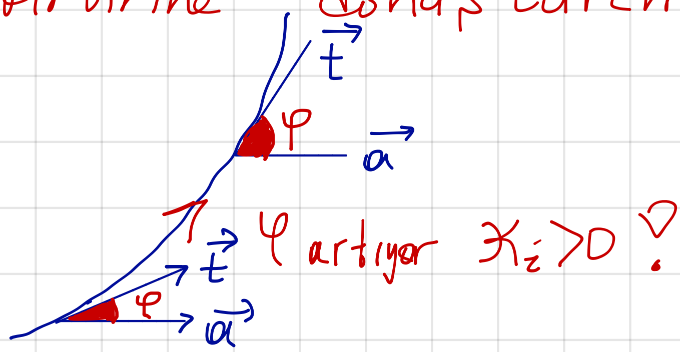
$$\tilde{\kappa}(s)=\frac{\|\dot{\tilde{\gamma}}\times\ddot{\tilde{\gamma}}\|}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^3}=\frac{2}{(1+4s^2)^{3/2}}$$ olur.

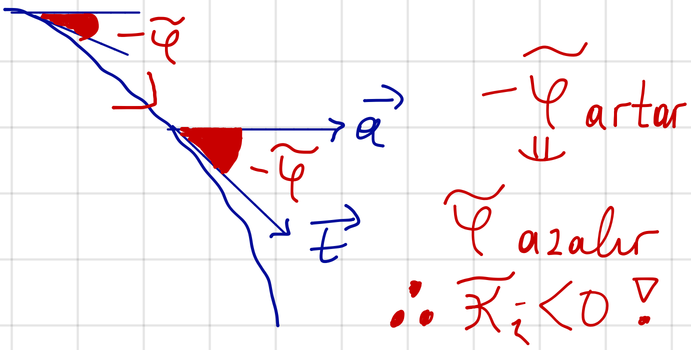


Sonuç olarak, her $t=s\in(0,\infty)$ için

$\gamma(t)$ ve $\tilde{\gamma}(s)$ noktasındaki eğrilikler $\kappa(t)=\tilde{\kappa}(s)$ olur.

Ancak, bu eğrileri düzlemde katı hareketlerle birbirine dönüştüremeyiz. Bunun bir sebebi:





2.3 Uzay Eğrileri:

Düzlem eğrileri esas itibariyle eğrilikleri tarafından belirleniyordu (bkz. Theorem 2.1). Bunun uzay eğrileri için geçerli olmadığını daha önce görmüştük. Mesela, $\gamma_1(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}t)$ helisiyle xy-düzlemindeki $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ birim çemberinin eğriliği

$$\kappa = \frac{|a|}{a^2+b^2} = 1 \text{'dir.} \qquad (\gamma_1\text{'de } a=b=\tfrac{1}{2}\,;\ \gamma_2\text{'de } a=1, b=0)$$

Ancak bu iki eğrinin dönme ve ötelemeyle birbirinden elde edilemeyeceği açıktır. Bu yüzden, bu iki eğriyi ayırt eden başka bir "değişmez" bulmalıyız.

Yani, dönme ve öteleme ile değişmeyen bir özellik bulmalıyız ve bu bir reel sayı olmalı. Eğrilik, doğrudan sapmayı ölçüyordu bu ise düzlemden sapmayı ölçmeli.

Şimdi, burulma (torsiyon) adı vereceğimiz bu değişmezi tanımlayalım.

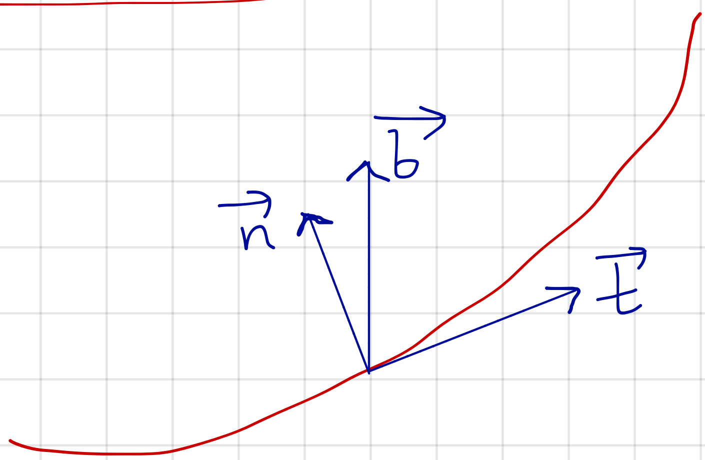
$\gamma(s) \subseteq \mathbb{R}^3$ birim-hızlı bir eğri, $\vec{t} = \dot{\gamma}$ teğet vektörü olsun. Eğer eğrilik $\kappa(s) \neq 0$ ise, $\gamma(s)$ noktasındaki esas normal $\vec{n}(s) = \dfrac{\dot{\vec{t}}(s)}{\kappa(s)}$ olarak

tanımlanır. $\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \|\dot{\vec{t}}\|$ olduğu için $\vec{n}$ birim vektör.

$\vec{t} \perp \dot{\vec{t}}$ olduğundan $\vec{t} \perp \vec{n}$'dir. Dolayısıyla,

$\vec{b} := \vec{t} \times \vec{n}$ vektörü $\vec{t}$ ve $\vec{n}$'ye dik birim vektördür. $\vec{b}$'ye binormal vektörü denir.

Böylece $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ sağ-el kuralına uyan bir ortonormal baz verir, çünkü $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$



ve $\vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}$ olduğundan

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n} \times \vec{b} = \vec{t} \\ \vec{b} \times \vec{t} = \vec{n} \end{array}}$$

elde edilir.

$1 = \|\vec{b}\| = \vec{b} \cdot \vec{b}$ olduğundan $\dot{\vec{b}} \perp \vec{b}$'dir.

Öte yandan, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$'nin s'ye göre türevini alırsak

$\dot{\vec{b}} = \dot{\vec{t}} \times \vec{n} + \vec{t} \times \dot{\vec{n}} = \kappa \vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \dot{\vec{n}} = \vec{t} \times \dot{\vec{n}}$,

yani $\dot{\vec{b}} \perp \vec{t}$'dir. Bu yüzden $\dot{\vec{b}} \parallel \vec{n}$ olur.

$\dot{\vec{b}} \parallel \vec{n} \iff \dot{\vec{b}}$, $\vec{n}$'nin bir katıdır.

$\dot{\vec{b}} = (-\tau)\vec{n}$ olacak şekilde bulunan $\tau \in \mathbb{R}$'ye γ'nın burulması denir.

Uyarı: Burulma, γ birim-hızlı ve $\kappa(s) \neq 0$ iken tanımlandı. Daha önce eğrilik için yaptığımız gibi düzenli eğriler için de burulma tanımı yapılabilir.

Tanım: γ düzenli ise γ'nın birim-hızlı bir reparametrizasyonunun burulmasına γ'nın burulması denir.

Uyarı: Hangi reparametrizasyonu kullandığımız farketmez, çünkü $u = \mp s + c$ ve $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(s)$ için

$\dfrac{d\tilde{\gamma}}{du} \cdot \dfrac{du}{ds} = \dot{\gamma}(s)$ olur. $\dfrac{du}{ds} = \mp 1$ olduğu için

$\dfrac{d\tilde{\gamma}}{du} = \mp \dfrac{d\gamma}{ds}$ olur. Yani, parametre değişiminin

teğet vektöre etkisi $\vec{t} \longrightarrow \mp \vec{t}$ şeklindedir.

Benzer şekilde, $\dot{\vec{t}} \to \dot{\vec{t}}$; $\vec{n} \to \vec{n}$; $\vec{b} \to \mp \vec{b}$, $\dot{\vec{b}} \to \dot{\vec{b}}$

olduğu görülebilir. Yani, $\boxed{\dot{\vec{b}} = -\tau \vec{n}}$ değişmez.

Ör: $\gamma(\theta) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ b\theta)$ helisini alalım.

$a=0$ iken γ, z-ekseninde yatacağından $a\neq 0$ kabul edebiliriz.

γ düzenli olduğundan birim-hızlı reparametrizasyonu vardır:

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{a^2+b^2}\,du = \sqrt{a^2+b^2}\,\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\delta(s) = \gamma(\theta) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right)$$ olur.

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ b\right)$$

$$\dot{\vec{t}} = \frac{1}{(a^2+b^2)}\left(-a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ -a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ 0\right)$$

$$\boxed{\kappa = \|\dot{\vec{t}}\| = |a| / a^2+b^2}$$ 'dir.

$$\vec{n} = \frac{\dot{\vec{t}}}{\kappa} = \frac{(a^2+b^2)}{|a|}\cdot\frac{(-a)}{(a^2+b^2)}\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ 0\right)$$

$$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = \frac{-a}{|a|\sqrt{a^2+b^2}}\left(-b\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ b\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ -a\right)$$

$$\dot{\vec{b}} = \frac{ab}{|a|(a^2+b^2)}\left(\cos\left(\frac{s}{a^2+b^2}\right),\ \sin\left(\frac{s}{a^2+b^2}\right),\ 0\right)$$

$\tau = -\dot{\vec{b}}\cdot\vec{n} = -\dfrac{(-a^2b)}{|a|^2(a^2+b^2)}$ olduğundan $\boxed{\tau = \dfrac{b}{a^2+b^2}}$ 'dir.

$\gamma(\theta) = \left(\sqrt{3}/2 \cos\theta,\ \sqrt{3}/2 \sin\theta,\ 1/2\,\theta\right)$ helisiyle

$\gamma(\theta) = \left(2/\sqrt{3} \cos\theta,\ 2/\sqrt{3} \sin\theta,\ 0\right)$ çemberinin

eğrilikleri $\kappa(s) = \dfrac{|a|}{a^2+b^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ iken burulmaları

$\tau(s) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ olduğundan farklıdır.

Soru: Verilen $A>0$ $B\neq 0$ sabitleri için eğriliği A burulması B olan helis var mıdır?

Yanıt: $a = A/A^2+B^2$ $b = B/A^2+B^2$ için

$$a^2+b^2 = \frac{A^2}{(A^2+B^2)^2} + \frac{B^2}{(A^2+B^2)} = \frac{A^2+B^2}{(A^2+B^2)^2} = \frac{1}{A^2+B^2}$$

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{A}{A^2+B^2} \cdot \frac{A^2+B^2}{1} = A$$

$$\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{B}{A^2+B^2} \cdot \frac{A^2+B^2}{1} = B \quad \text{olur.}$$

Önerme 2.3 γ, $\mathbb{R}^3$'te düzenli ve eğriliği hiç bir noktada sıfır-olmayan bir eğri olsun. O zaman,

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}$$ olur.

Not: Önerme 2.1'den $\kappa = \dfrac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \neq 0 \iff \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| \neq 0$.

Örnek: $\gamma(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ helisini bir de bu formülü kullanarak bulalım:

$$\dot{\gamma} = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b)$$

$$\ddot{\gamma} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2) \quad \text{ve} \quad \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2 = a^2b^2 + a^4.$$

$$\dddot{\gamma} = (a\sin\theta, -a\cos\theta, 0)$$

$$(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \cdot (\dddot{\gamma}) = a^2 b \longrightarrow \tau = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

İspat: İlk aşamada γ'nın birim-hızlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\tau = -n \cdot \dot{b}$ idi.

$b = t \times n \Rightarrow \dot{b} = \dot{t} \times n + t \times \dot{n}$ ve $\dot{t} \times n \perp n$ olduğundan

$$\tau = -n \cdot \boxed{(\dot{t} \times n) + t \times \dot{n}} = -n \cdot (t \times \dot{n}) \text{ olur.}$$

$$n = \frac{1}{\kappa}\dot{t} = \frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma} \Rightarrow \dot{n} = \frac{1}{\kappa}\dddot{\gamma} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\ddot{\gamma}$$

$$\tau = -n\cdot(t\times\dot{n}) = -\frac{1}{\kappa}\ddot{\gamma}\cdot\left(\dot{\gamma}\times\left(\frac{1}{\kappa}\dddot{\gamma} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\ddot{\gamma}\right)\right)$$

$$= -1/\kappa\,\ddot{\gamma}\cdot\Big(1/\kappa\,\dot{\gamma}\times\dddot{\gamma} - \dot{\kappa}/\kappa^2\,\underbrace{\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}}_{\ddot{\gamma}\text{'ye dik}}\Big) = -1/\kappa^2\,\ddot{\gamma}\cdot(\dot{\gamma}\times\dddot{\gamma})$$

$$\tau = 1/\kappa^2\,\dddot{\gamma}\cdot(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})$$ (Karma çarpım = determinant !)

$$= \frac{\dddot{\gamma}\cdot(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2},$$ çünkü $\kappa = \dfrac{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$ ve $\|\dot{\gamma}\| = 1$.

İkinci aşama için, s yay-uzunluğu, $\dot{\gamma} = \dfrac{d\gamma}{dt}$ ve $\gamma' = \dfrac{d\gamma}{ds}$ olsun.

$$\dot{\gamma} = \frac{ds}{dt}\gamma' \Rightarrow \ddot{\gamma} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\gamma'' + \frac{d^2s}{dt^2}\gamma'$$

$$\dddot{\gamma} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\gamma''' + 2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\gamma'' + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}\gamma'' + \frac{d^3s}{dt^3}\gamma'$$

$$\dddot{\gamma} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\gamma''' + 3\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\gamma'' + \frac{d^3s}{dt^3}\gamma'$$

$$\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\gamma'\times\gamma''$$ (çünkü $\gamma'\times\gamma' = 0$)

$$\dddot{\gamma}\cdot(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6\gamma'''\cdot(\gamma'\times\gamma'')$$ (çünkü $\gamma'\times\gamma''$, γ' ve γ'''ye dik.)

$$\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6\|\gamma'\times\gamma''\|^2$$ olduğundan,

$$\frac{\dddot{\gamma}\cdot(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2} = \frac{\gamma'''\cdot(\gamma'\times\gamma'')}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2} = \tau$$ olur. $\square$

Örnek: $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$ eğrisinin teğet vektörü

$\dot\gamma(t)=(1,2t,3t^2)$ ve hızı $\|\dot\gamma(t)\|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$.

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{1+4u^2+9u^4}\,du$$

Bu integral "eliptik integrallere" bir örnek olup logaritmik, üstel ve trigonometrik vb. tanıdık fonksiyonlar cinsinden hesaplanamaz.

$\ddot\gamma(t)=(0,2,6t)$ $\quad\dddot\gamma(t)=(0,0,6)$

$$(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma=\begin{vmatrix}1&2t&3t^2\\0&2&6t\\0&0&6\end{vmatrix}=(-1)^6\cdot 6\begin{vmatrix}1&2t\\0&2\end{vmatrix}=6\cdot2=12.$$

$$\dot\gamma\times\ddot\gamma=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2t&3t^2\\0&2&6t\end{vmatrix}=6t^2i-6tj+2k$$

$(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma=6t^2(0)-6t(0)+2(6)=12$ (2. yol)

$\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|^2=36t^4+36t^2+4=4(9t^4+9t^2+1)$

$\|\dot\gamma\|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$

$$\kappa(t)=\frac{\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}=\frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$$

$$\tau(t)=\frac{(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma}{\|\dot\gamma\times\ddot\gamma\|^2}=\frac{3}{9t^4+9t^2+1}$$

Önerme 2.4 γ uzayda eğriliği hiç sıfır olmayan düzenli bir eğri olsun. γ bir düzlemde yatar $\Leftrightarrow \tau = 0$.

İspat: γ'nın birim hızlı olduğunu kabul edebiliriz, çünkü reparametrizasyon ne burulmayı ne de γ'nın düzlemde yatmasını etkiler. γ, denklemi $ax+by+cz=d$ olan bir düzlemde yatsın. $\vec{r}=(x,y,z)$ ve $\vec{u}=(a,b,c)$ dersek denklem $\vec{r}\cdot\vec{u}=d$ şeklini alır. Burada genelliği bozmadan $\|\vec{u}\|=1$ olduğunu kabul edebiliriz. Dolayısıyla, $\gamma(s)\cdot\vec{u}=d$ 'dir. Her iki tarafın s'ye göre türevini alırsak, $\vec{t}\cdot\vec{u}=0$ $(\dot{\vec{u}}=0)$ elde ederiz. Yine türev alırsak, $\dot{\vec{t}}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \varkappa\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ $\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0$ $(\varkappa\neq 0)$, elde ederiz. Yani, $\vec{t}$ ve $\vec{n}$ $\vec{u}$'ya diktir. Bu durumda ikisi de birim vektör olduğundan ya hep $\vec{b}(s)=\vec{u}$ ya da hep $\vec{b}(s)=-\vec{u}$ olur, çünkü $\vec{b}$ düzgün bir fonksiyon olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $\dot{\vec{b}}=0$'dır ki $\tau=0$ olur.

Tersine, $\tau(s)=0, \forall s$ olsun. $\dot{\vec{b}}=-\tau\vec{n}=0$ ve $\vec{b}(s)$ sabit olur. İspatın ilk kısmı γ'nın "$\vec{r}\cdot\vec{b}=$ sabit" gibi bir düzlemde bulunduğunu ima etmektedir.

Gerçekten de $\frac{d}{ds}(\gamma\cdot\vec{b}) = \dot{\gamma}\cdot\vec{b} + \underbrace{\gamma\cdot\dot{\vec{b}}}_{0} = \vec{t}\cdot\vec{b} = 0$

olduğundan, $\gamma\cdot\vec{b} = d$ olacak bir $d\in\mathbb{R}$ vardır. Yani, γ, $\vec{r}\cdot\vec{b} = d$ düzleminde yatmaktadır. $\square$

Teorem 2.2 γ uzayda eğriliği hiç sıfır olmayan birim-hızlı bir eğri olsun. Bu durumda $\dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}$, $\dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}$ ve $\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}$ olur.

İspat: Daha önce $\dot{\vec{t}} = \kappa\vec{n}$ ve $\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n}$ olduğunu gördük.

$$\vec{n} = \vec{b}\times\vec{t} \Rightarrow \dot{\vec{n}} = \dot{\vec{b}}\times\vec{t} + \vec{b}\times\dot{\vec{t}}$$
$$= -\tau(\underbrace{\vec{n}\times\vec{t}}_{-\vec{b}}) + \kappa(\underbrace{\vec{b}\times\vec{n}}_{-\vec{t}}) = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}.$$

Tanım: $\begin{bmatrix}\dot{\vec{t}}\\ \dot{\vec{n}}\\ \dot{\vec{b}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix}$ denklemine Serret-Frenet denklemi denir.

Önerme 2.5 γ birim-hızlı bir uzay eğrisi, $\kappa(s) = \text{sabit}$, $\tau(s) = 0$ ise γ bir çemberde yatmaktadır.

İspat: Önerme 2.4'ün ispatından, $\vec{b}$ binormali γ'nın içinde bulunduğu düzleme dik sabit bir vektördür.

Öte yandan Serret-Frenet denklemlerinden $\dot{\vec{n}} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}$ eşitliğinde $\tau = 0$ olduğundan $\dot{\vec{n}}(s) = -\kappa\,\vec{t}(s)$ olur. κ sabit olduğundan $\frac{d}{ds}\left(\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}\vec{n}\right) = \vec{t}(s) + \frac{1}{\kappa}\dot{\vec{n}}(s) = 0$ veya sabit $\vec{a}$ için $\gamma(s) + \frac{1}{\kappa}\vec{n} = \vec{a}$ elde edilir. Buradan $\|\gamma - \vec{a}\| = \|-\frac{1}{\kappa}\vec{n}\| = \frac{1}{\kappa}$ elde edilir ki, bu γ'nın merkezi $\vec{a}$ yarıçapı $1/\kappa$ olan kürede yattığı anlamına gelir. Özetle, γ bu küreyle $\vec{b}$'ye dik düzlemin kesişimi olan çemberde yatmaktadır. Aslında bu düzlem, kürenin merkezinden geçmekte, çünkü $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\gamma + \frac{1}{\kappa}\vec{n})\cdot\vec{b}$ ve $\vec{b} \perp \vec{n}$ olduğundan $\vec{a}\cdot\vec{b} = \gamma\cdot\vec{b}$ olur. γ, $\vec{r}\cdot\vec{b} = d$ denklemini sağladığından $\vec{a}$ da sağlamaktadır. $\square$

Bu kısmın ana teoremi de Serret-Frenet denklemlerinin bir sonucu olarak elde edilmektedir:

Teorem 2.3 $\gamma(s)$ ve $\tilde{\gamma}(s)$ aynı $\kappa(s) > 0$ eğriliğine ve $\tau(s)$ burulmasına sahip birim hızlı iki uzay eğrisi ise $\mathbb{R}^3$'ün bir M katı hareketiyle γ, $\tilde{\gamma}$'ya taşınabilir: $\tilde{\gamma}(s) = M(\gamma(s))$.

Dahası, verilen her düzgün $\kappa(s)>0$ ve $\tau(s)$ fonksiyon ikilisi için eğriliği κ burulması τ olan birim-hızlı bir uzay eğrisi vardır.

Alıştırmalar:

1) Aşağıdaki eğriler için $\kappa, \tau, \vec{t}, \vec{n}$ ve $\vec{b}$'yi bulup Serret-Frenet denklemlerinin sağlandığını görünüz.

a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$

b) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1-\sin t, -\frac{3}{5}\cos t \right)$ $\quad x^2+z^2=\cos^2 t$

$3x=-4z$ $\quad x \quad y \quad z$ $\quad (y-1)^2 = \sin^2 t$

2) $\gamma(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t} \right)$ düzlemde yatar, gösteriniz.

3) İlk sorunun b şıkkındaki eğrinin bir çember olduğunu gösteriniz. Merkezini, yarıçapını ve hangi düzlemde yattığını bulunuz.

Çözümler:

2) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{t}+t,\ 1+t,\ \frac{1}{t}-1\right)$ ise

$\dot{\gamma} = \left(-\frac{1}{t^2}+1,\ 1,\ -\frac{1}{t^2}\right)$, $\ddot{\gamma} = \left(\frac{2}{t^3},\ 0,\ \frac{2}{t^3}\right)$ ve

$\dddot{\gamma} = \left(-\frac{6}{t^4},\ 0,\ \frac{-6}{t^4}\right)$ olur.

$$(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})\cdot\dddot{\gamma} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{t^2}+1 & 1 & -\frac{1}{t^2} \\ \frac{2}{t^3} & 0 & \frac{2}{t^3} \\ -\frac{6}{t^4} & 0 & -\frac{6}{t^4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{2}{t^3} & \frac{2}{t^3} \\ \frac{-6}{t^4} & \frac{-6}{t^4} \end{vmatrix} = 0.$$

$\tau = \dfrac{(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})\cdot\dddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\|^2} = 0$ olur. $\Rightarrow \gamma$ düzlemde yatar.

Not: $\dot{\gamma}$ ve $\ddot{\gamma}$ birbirinin katı olmadığından $\|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}\| > 0$.

Soru: γ hangi düzlemde yatmaktadır?

$x = \frac{1}{t}+t$, $y = 1+t$, $z = \frac{1}{t}-1$ ise

$x - z = t + 1 = y$ olduğundan γ, $x-y-z=0$

düzleminde yatmaktadır.