BÖLÜM 4: YÜZEYLER

Sezgisel olarak $\mathbb{R}^3$'te bir yüzey bir nokta civarında ? düzlem parçası gibi görünür ?

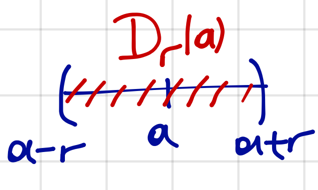
Matematiksel kesinlikte bir tanım yapmak için bazı topolojik kavramlara ihtiyaç duymaktayız.

$\mathbb{R}^n$'de topoloji

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $b \in U$ için $\|b-u\| < \varepsilon \Rightarrow u \in U$ olmasını sağlayan bir $\varepsilon > 0$ varsa U'ya açık denir. (Aşağıda $\varepsilon = \min\{\|b-a\|, r-\|b-a\|\}$ olabilir)

Örnek: $D_r(a) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u-a\| < r\}$ açık yuvarı bir açık kümedir. Çünkü, her $b \in D_r(a)$ için $\|u-b\| < \varepsilon$ iken $\|u-a\| \leq \|u-b\| + \|b-a\| < \varepsilon + \|b-a\| \leq r$ olacak $\varepsilon = \frac{r-\|b-a\|}{2} > 0$ vardır, yani $u \in D_r(a)$.

$n=1$ için $D_r(a)$'ya açık aralık denir:



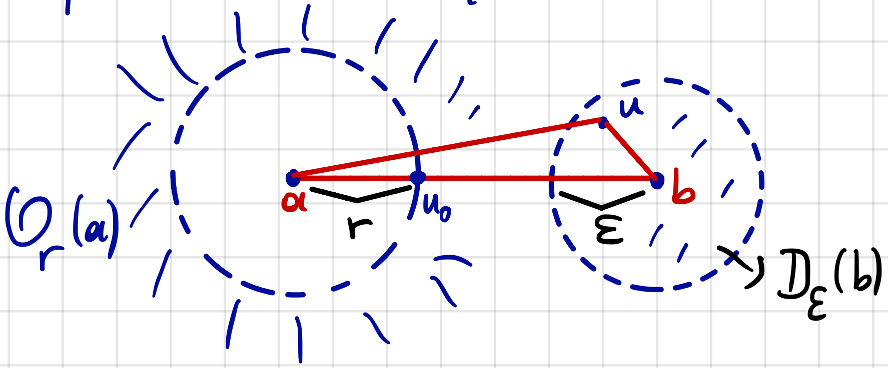
$n=2$ için $D_r(a)$'ya açık disk denir:

Ör: $O_r(a) = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \|u-a\| > r \}$ açık kümedir.

Her $b \in O_r(a)$ için bir $u_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır ki,

$$\|a-u_0\| + \|u_0-b\| = \|a-b\| \text{ ve } \|u_0-a\| = r \text{ sağlanır.}$$

Yani, u_0 noktası ab doğru parçasıyla $S_r(a) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u-a\| = r\}$ hiperküresinin kesişim noktasıdır. $\varepsilon \leq \|a-b\| - r = \|u_0-b\|$ olsun.



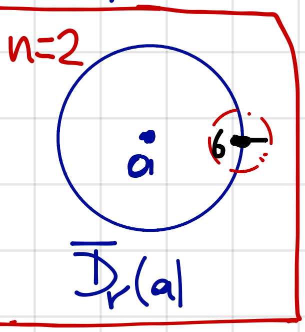
$\left.\right\}$ $\forall b \in O_r(a)$ için $D_\varepsilon(b) \subseteq O_r(a)$?

$u \in D_\varepsilon(b)$ için $\|u-b\| < \varepsilon$'dır. Eğer, $\|u-a\| \leq r$ olsaydı,

$$\|a-b\| \leq \|a-u\| - \|u-b\| < r + \varepsilon \leq r + \|u_0 - b\| = \|a-u_0\| + \|u_0-b\| = \|a-b\|$$

çelişkisi elde edilirdi. Demek ki, $\|u-a\| > r$, yani $u \in O_r(a)$.

Ör: Öte yandan $\overline{D_r(a)} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u-a\| \leq r\}$ açık değildir, çünkü her $\varepsilon > 0$ için öyle bir



$b = (a_1 + r, a_2, \dots, a_n) \in \overline{D_r(a)}$ (çünkü $\|b-a\| = r$)

var ki $u = (a_1 + r + \frac{\varepsilon}{2}, a_2, \dots, a_n) \in D_\varepsilon(b)$,

yani $\|u-b\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, olduğu halde $u \notin \overline{D_r(a)}$

zira $\|u-a\| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r$.

Tanım: $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f: X \to Y$ fonksiyon olsun. Eğer $a \in X$ civarındaki noktaların görüntüsü $f(a)$ civarını örterse, daha açık bir ifadeyle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : u \in X \text{ ve } \|u-a\| < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(a)\| < \varepsilon,$$

sağlanırsa f'ye <u>a'da sürekli</u> denir. f dönüşümü her $a \in X$'de sürekliyse f'ye <u>sürekli</u> denir.

Ödev: 1) Sürekli iki fonksiyonun bileşkesi de süreklidir, gösteriniz.

2) $f: X \to Y$ süreklidir $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$'nin açık her V altkümesi için $\mathbb{R}^m$'nin açık bir U altkümesi vardır ki $f(U \cap X) \subset V \cap Y$.

İddia: Sürekli $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ fonksiyonlarının bileşkesi $g \circ f: X \to Z$ süreklidir.

Kanıt: $g \circ f$'nin her $a \in X$ noktasında sürekli olduğunu göstermek için $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ bulmalıyız ki $u \in X$ ve $\|u - a\| < \delta \Rightarrow \|g(f(u)) - g(f(a))\| < \varepsilon$ sağlansın.

Verilenler: f, $a \in X$ noktasında sürekli olduğundan,

(*) $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \|u - a\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(u) - f(a)\| < \varepsilon_1$ olur.

Benzer şekilde, g fonksiyonu da $f(a) \in Y$'de sürekli olduğundan,

(**) $\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \|v - f(a)\| < \delta_2 \Rightarrow \|g(v) - g(f(a))\| < \varepsilon_2$'dir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\varepsilon_2 = \varepsilon$ için bir $\delta_2 > 0$ vardır ki (**) sağlanır. $\varepsilon_1 = \delta_2$ için bir $\delta_1 > 0$ vardır ki (*) sağlanır.

Bu durumda, bir $\delta = \delta_1 > 0$ vardır ki (*) sağlandığından, $\|u - a\| < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(a)\| < \delta_2$ olur. (**) sağlandığından

$$\Rightarrow \|g(f(u)) - g(f(a))\| < \varepsilon_2 = \varepsilon \text{ olur.} \qquad \square$$

Tanım: $f: X \to Y$ ve $f^{-1}: Y \to X$ fonksiyonları sürekli ise f'ye (ya da f^{-1} fonksiyonuna) <u>homeomorfizma</u> denir. X kümesinden Y'ye tanımlı bir homeomorfizma varsa bu iki kümeye <u>homeomorf</u> denir ve $X \cong Y$ şeklinde gösterilir.

Özetle: $X \cong Y \Leftrightarrow$ 1) $f: X \to Y$ 1-1, örten sürekli fonksiyonu vardır. 2) f'nin tersi de süreklidir.

Örnek: $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

1) $f: I=(0,2\pi)\to G\setminus\{(1,0)\}$, $f(t)=(\cos t,\sin t)$ bir homeomorfizmadır.

Açıklama: $g: G\setminus\{(1,0)\}\to I$, $g(x,y)=\begin{cases}\arccos x, & y\geq 0\\ 2\pi-\arccos x, & y<0\end{cases}$

fonksiyonu f'nin tersidir, çünkü

• $t\in I$ → $t\in(0,\pi)\Rightarrow \sin t\geq 0$ & $g(f(t))=g(\cos t,\sin t)=\arccos(\cos t)=t$

→ $t\in(\pi,2\pi)\Rightarrow \sin t<0$ olduğundan $g(f(t))=g(\cos t,\sin t)=2\pi-\arccos(\cos t)$

$=2\pi-(2\pi-t)=t$, çünkü $(0,\pi)$ aralığında olup da kosinüsü $\cos t$ olan açı $2\pi-t$'dir. ✓✓ ✓

•• $(x,y)\in G\setminus\{(1,0)\}\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}\geq 0$ veya $y=-\sqrt{1-x^2}<0$ olur.

★ $y\geq 0\Rightarrow t=g(x,y)=\arccos x\in(0,\pi)$ olur. Böylece, $\sin t\geq 0$, $\cos t=x$ ve $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-x^2}=y$ olur.

Dolayısıyla, $f(g(x,y))=f(t)=(\cos t,\sin t)=(x,y)$ olur.

★★ $y<0\Rightarrow t=g(x,y)=2\pi-\arccos x\in(\pi,2\pi)$ ve $\sin t<0$ olur. Böylece, $x=\cos(\arccos x)=\cos(2\pi-t)=\cos t$ ve dolayısıyla $\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\sqrt{1-x^2}=y$ olur ki $f(g(x,y))=(x,y)$'dir.

g'nin sürekliliğine $y=0$ iken bakmak yeterlidir:

$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ ((x,y)\to(-1,0))}} g(x,y)=\pi=g(-1,0)=\lim_{\substack{y\to 0^-\\ ((x,y)\to(-1,0))}} g(x,y),\quad \text{çünkü}$$

$\arccos x\to\pi$ iken $2\pi-\arccos x\to\pi$! f'nin sürekliliği açık!

2) $f: J=(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathcal{C} \setminus \{(-1,0)\}$, $f(t)=(\cos t, \sin t)$ bir homeomorfizmadır.

Açıklama: $h: \mathcal{C} \setminus \{(-1,0)\} \longrightarrow J$, $h(x,y)=\begin{cases} \arccos x, & y \geq 0 \\ -\arccos x, & y < 0 \end{cases}$

fonksiyonunun, f'nin tersi olduğu bir önceki durumda olduğu gibi görülebilir. Yine f ve h'nin sürekli olduğu da görülebilir. Bu yüzden f (ve dolayısıyla h) bir homeomorfizmadır.

Tanım: $f: X \to Y$ 1-1, örten ve sürekli iken f^{-1} de sürekliyse f'ye homeomorfizma denir. Bu durumda X ve Y'ye homeomorfik denir.

Tanım: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ verilsin. Eğer her $P \in S$ için $\mathbb{R}^2$'nin bir U açığı ile $\mathbb{R}^3$'ün P'yi içeren ve S ile kesişimi U'ya homeomorfik olan bir W açığı varsa S'ye bir yüzey denir.

NOT: Tanımdan dolayı her yüzey $\sigma: U \to S \cap W$ homeomorfizmlerinin bir koleksiyonuyla elde edilir. Bunlara yüzey yaması veya parametrizasyonlar deriz. $\mathcal{A} = \{S'yi \text{ yüzey yapan } (U, \sigma)\}$ kümesine S'nin bir atlası denir. $S \subseteq \bigcup_{U} \sigma(U)$ olduğu açık.

Örnek: Her $\mathcal{D}$ düzlemi bir yüzeydir. $\|\vec{u}\| = 1 = \|\vec{v}\|$ ve $\vec{u} \perp \vec{v}$ için $\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X = A + s\vec{u} + t\vec{v}\}$ ise

$$\sigma(s,t) = (a_1 + su_1 + tv_1, a_2 + su_2 + tv_2, a_3 + su_3 + tv_3)$$

dersek σ, 1-1, örten ve süreklidir. $\sigma^{-1} = ?$

$\sigma^{-1}(x,y,z) = (s,t) \Leftrightarrow \sigma(s,t) = (x,y,z) = X$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = s\vec{u} + t\vec{v}$ 'dir.

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{u} = s\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{1} + t\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} = s$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{v} = s\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} + t\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{1} = t$$

$$\left[\begin{array}{c} \|\vec{u}\| = 1 = \|\vec{v}\| \\ \vec{u} \perp \vec{v} \end{array}\right]$$

olduğundan $\sigma^{-1}(X) = (\underbrace{\overrightarrow{AX}\cdot\vec{u}}, \overrightarrow{AX}\cdot\vec{v})$ olur.

$u_1(x-a_1)+u_2(y-a_2)+u_3(z-a_3)$ polinom

Benzer şekilde, $\overrightarrow{AX}\cdot\vec{v}$ de polinom olur.

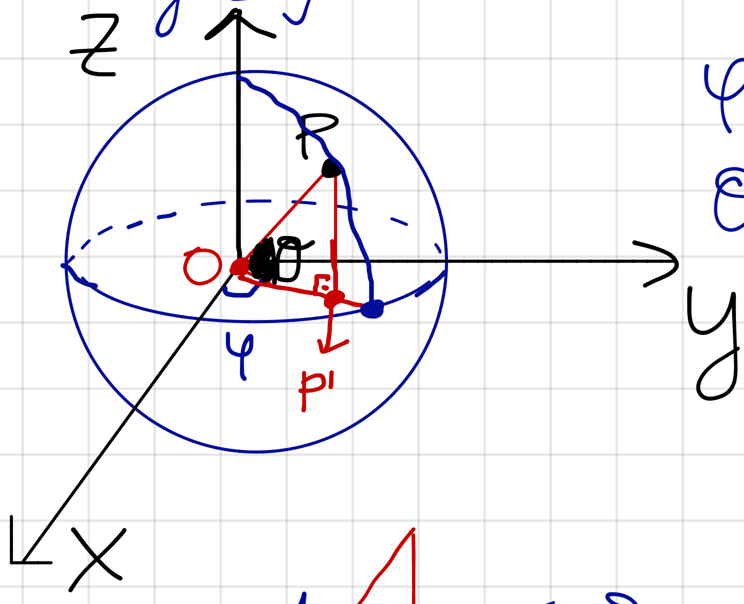
Polinomlar sürekli olduğundan σ^{-1} de süreklidir.

$\sigma : U = \mathbb{R}^2 \to \mathcal{D}$ örten olduğundan $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^2, \sigma)\}$ olur.

Ödev: Her düzlemin yukarıdaki $\mathcal{D}$ şeklinde ifade edilebileceğini gösteriniz.

İpucu: $\mathcal{D} = \{A + t\tilde{u} + s\tilde{v} \,/\, t, s \in \mathbb{R}\}$ ise Gramm–Schmith metoduyla $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ den $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ ortonormal çatısı elde edilebilir.

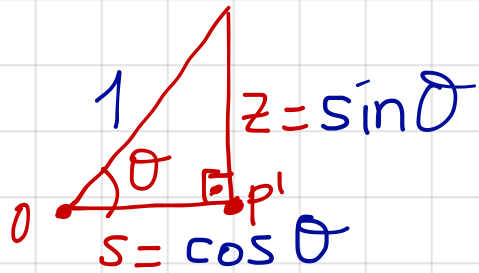
Örnek: Birim küre, $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$, bir yüzeydir.

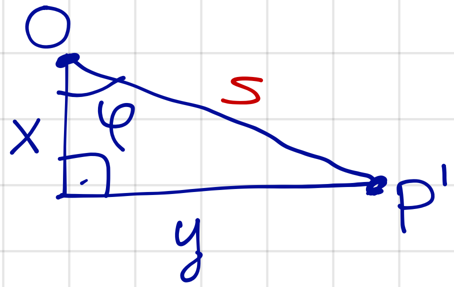


φ açısı x-ekseninden sapma

θ açısı xy-düzleminden //

$\Downarrow$





$$\boxed{\begin{aligned} x &= s\cos\varphi = \cos\theta\cos\varphi \\ y &= s\sin\varphi = \cos\theta\sin\varphi \\ z &= \sin\theta \end{aligned}}$$

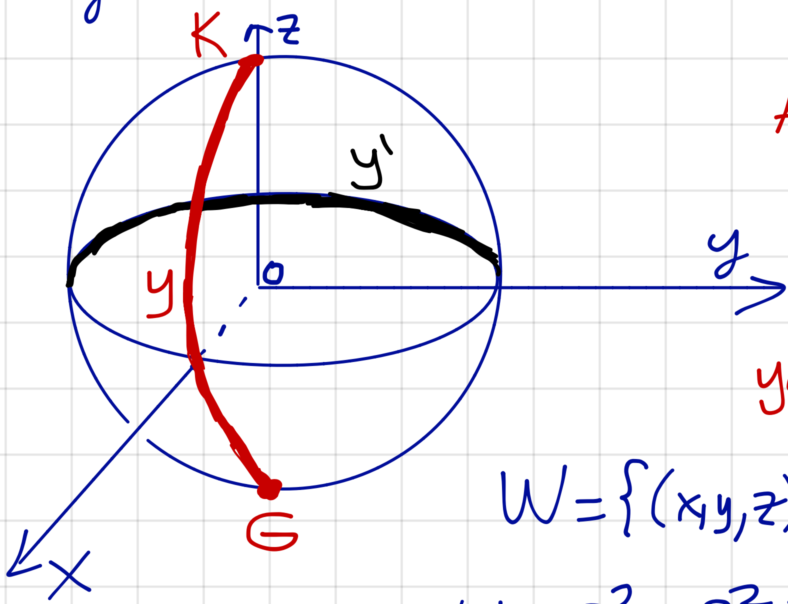
$\sigma(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta)$ olsun.

trigonometrik $\Rightarrow$ sürekli $\Rightarrow$ σ sürekli

σ'nın 1-1 olması için ve görüntü kümesinin en büyük olması için $(\theta,\varphi)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)=U$ alırız.

Ödev: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times(0,2\pi)$ ve $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times[0,2\pi)$ altkümeleri $\mathbb{R}^2$'de açık değildir, gösteriniz.

Sorun: Küre üzerinde (σ, U) tarafından örtüle-meyen noktalar var: $\sigma : U \to S^2$ örten değil.



Açıkta kalan noktalar $\mathcal{Y} = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y=0 \text{ ve } x \geq 0\}$ yarım çemberi üzerindedir.

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \text{ veya } x < 0\}$ ise $W \cap S^2 = S^2 \setminus \mathcal{Y} = \sigma(U)$ olur.

σ^{-1} de sürekli olduğundan (arcsin, arccos fonksiyonları sürekli) σ bir homeomorfizma.

Açıkta kalan kısmı örtmek için $\sigma(U)$'yu z-ekseni etrafında π ve x-ekseni etrafında $\frac{\pi}{2}$ radyan döndürmek yeter: $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ halini alır!

$\tilde{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$ iken $\mathcal{Y}' = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x \leq 0 \text{ ve } z = 0\}$ olduğu için $W' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ veya } z \neq 0\}$ alınır ve $S^2 \cap W' = S^2 \setminus \mathcal{Y}' = \tilde{\sigma}(U)$ olur.

$\tilde{\sigma}: \mathcal{U} \to S^2 \cap W'$ bir homeomorfizm olduğu için S^2 atlası $\mathcal{A} = \{(\sigma, \mathcal{U}), (\tilde{\sigma}, \mathcal{U})\}$ olan bir yüzeydir.

ÖDEV: $\mathcal{U} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ için $\mathcal{U}$'dan $\mathbb{R}^3$'e;

$$\sigma_{\pm}^{x}(u,v) = \left(\pm\sqrt{1-u^2-v^2},\ u,\ v\right)$$

$$\sigma_{\pm}^{y}(u,v) = \left(u,\ \pm\sqrt{1-u^2-v^2},\ v\right)$$

$$\sigma_{\pm}^{z}(u,v) = \left(u,\ v,\ \pm\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

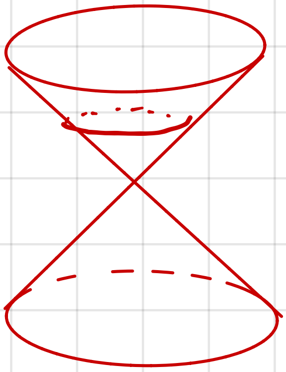
şeklinde 6 fonksiyon tanımlanabilir.

$$\mathcal{A} = \{(\sigma_+^x, \mathcal{U}), (\sigma_-^x, \mathcal{U}), (\sigma_+^y, \mathcal{U}), (\sigma_-^y, \mathcal{U}), (\sigma_+^z, \mathcal{U}), (\sigma_-^z, \mathcal{U})\}$$

S^2'nin başka bir atlasıdır, gösteriniz.

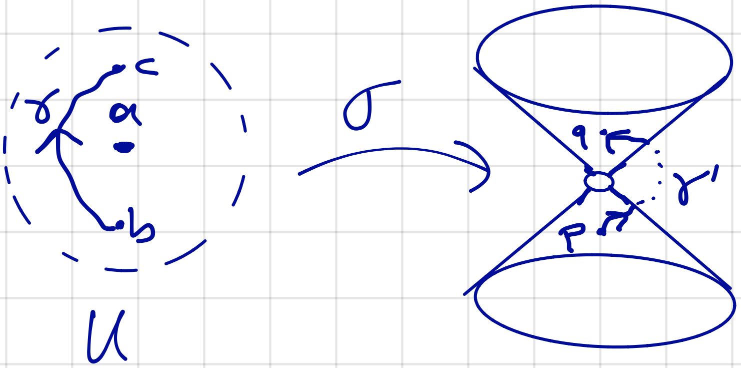
ÖDEV: S^2'nin tek elemanlı bir atlası olamaz, gösteriniz.

Örnek:



$K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$ duble konisi bir yüzey değildir. Bunu görmek için

$(0,0,0)$ köşe noktasını içeren $\sigma: U \to K\cap W$ yamasını alalım.



$\boxed{a=\sigma^{-1}(0)}$

$p=\sigma(b)$

$q=\sigma(c)$

$\sigma\circ\gamma=\gamma'$

U açığının merkezi a olan bir açık yuvarı içerdiğini biliyoruz. W açığında koninin $z<0$ olan bir p ve $z>0$ olan q noktası vardır. $b=\sigma^{-1}(p)$ ve $c=\sigma^{-1}(q)$ noktaları U'daki karşılık gelen noktalar olsun. U'da b ve c'den geçen ama a'yı ıskalayan bir γ eğrisi alırsak σ altındaki γ' görüntüsü de $K\cap W$'da p ve q'dan geçen ama 0 köşesini ıskalayan bir eğri olmak durumunda. Bu mümkün olmadığı için σ homeomorfizma değil!

Ör: Bir önceki örnekteki K konisinin köşesi çıkarılırsa $K\setminus\{0\} = K^+ \cup K^-$ bir yüzey olur.

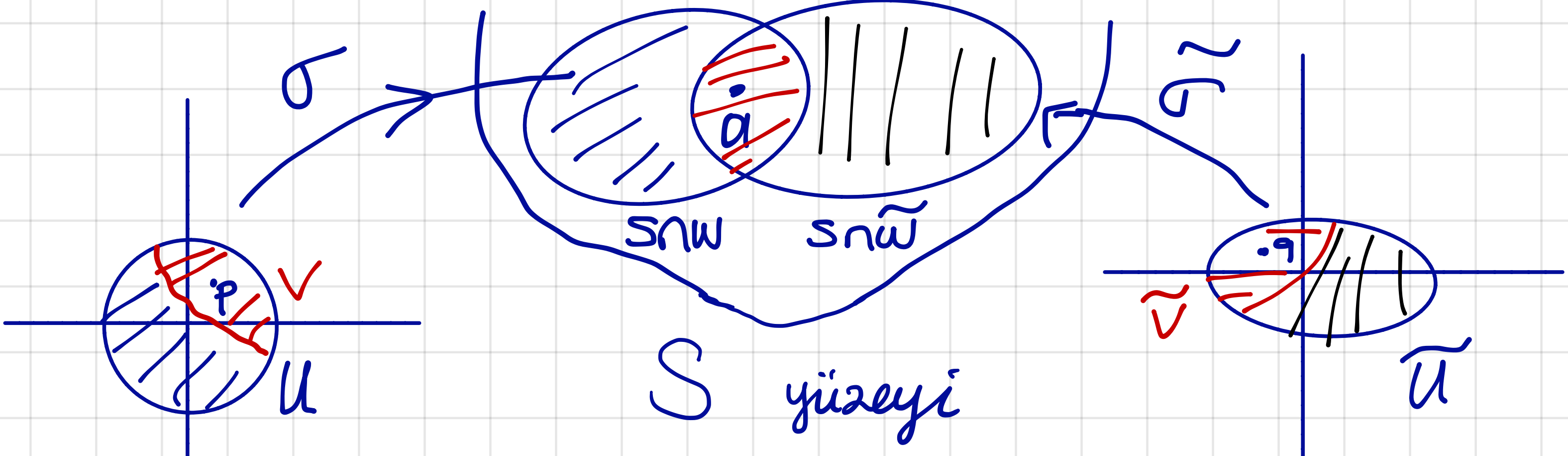
$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \sigma_\pm(u,v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2+v^2})$

fonksiyonu ve $\sigma_\pm^{-1}(x,y,z) = (x,y)$ sürekli olduğu için σ_+ ve σ_- homeomorfizm olur.

$\sigma_+(U) = K_+$ ve $\sigma_-(U) = K_-$ olduğundan $K\setminus\{0\}$'ın atlası $\mathcal{A} = \{(\sigma_+, U), (\sigma_-, U)\}$ şeklindedir.

Geçiş Dönüşümü

Küre örneğinde olduğu gibi bazen yüzeyin bir noktası birden fazla yama ile örtülebilir. Böyle durumlarda, bu noktaya düzlemde karşılık gelen noktalardan birinden diğerine geçiş yapılabilir.



$$(u,v) \in V \xleftarrow[\text{geçiş dönüşümü}]{\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}} (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{V}$$

$\sigma: \mathcal{U} \to S\cap W$ ve $\tilde{\sigma}: \tilde{\mathcal{U}} \to S\cap\tilde{W}$ iki yama ve $a \in S\cap W\cap\tilde{W}$ olsun. σ ve $\tilde{\sigma}$ homeomorfizm olduklarından $\sigma^{-1}(S\cap W\cap\tilde{W}) =: V$ ve $\tilde{\sigma}^{-1}(S\cap W\cap\tilde{W}) =: \tilde{V}$ kümeleri açıktır.

$\sigma^{-1}\circ\tilde{\sigma}: \tilde{V} \to V$ fonksiyonuna geçiş dönüşümü denir. Eğer $\Phi := \sigma^{-1}\circ\tilde{\sigma}$ dersek, her $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{V}$ için $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v}) = \sigma(\Phi(\tilde{u},\tilde{v}))$.

Yani, $(\tilde{u},\tilde{v})$ ile $(u,v) = \Phi(\tilde{u},\tilde{v})$ ikilileri $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v}) = \sigma(u,v)$ noktasını parametrize eder.

NOT: Φ geçiş dönüşümü ve tersi homeomorfizmdir.

Ör: $S =$ Birim küre, $\mathcal{U} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u^2+v^2<1\}$ ve $\mathcal{A} = \{(\sigma_{\pm}^{x}, \mathcal{U}), (\sigma_{\pm}^{y}, \mathcal{U}), (\sigma_{\pm}^{z}, \mathcal{U})\}$ olsun.

$$\sigma_{+}^{x}(u,v) = \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right) \text{ ve}$$

$$\sigma_{+}^{y}(\tilde{u},\tilde{v}) = \left(\tilde{u}, \sqrt{1-\tilde{u}^2-\tilde{v}^2}, \tilde{v}\right) \text{ yamaları için}$$

$$\sigma_{+}^{x}(u,v) = \sigma_{+}^{y}(\tilde{u},\tilde{v}) \iff \tilde{v} = v \text{ ve } \tilde{u} = \sqrt{1-u^2-v^2}$$

$$\iff v = \tilde{v} \text{ ve } u = \sqrt{1-\tilde{u}^2-\tilde{v}^2}$$

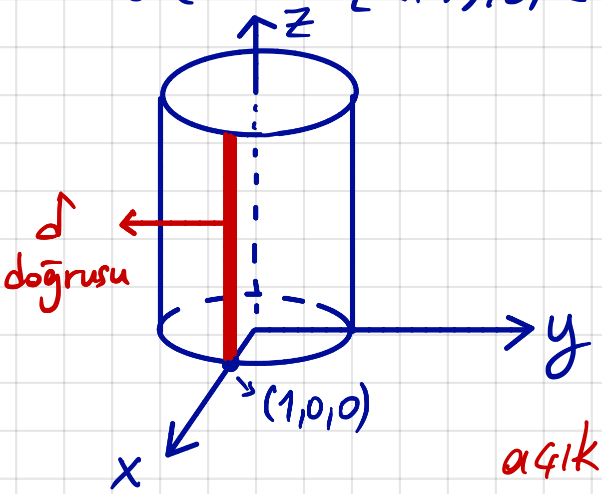
$$\Phi(\tilde{u},\tilde{v}) = \left(\sqrt{1-\tilde{u}^2-\tilde{v}^2}, \tilde{v}\right) \text{ ve } \Phi^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, v\right).$$

Ör: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ silindiri bir yüzeydir, gösterelim.

S'nin en basit parametrizasyonu $\left.\begin{aligned} x&=\cos u \\ y&=\sin u \\ z&=v \end{aligned}\right]$, dir.

$\sigma(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$ fonksiyonunun 1-1 olduğu en büyük açık $U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$'dir. $\sigma(U)=?$

$$\sigma(U)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}\setminus\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1, y=0\}}$$



$d=\{(1,0,v) \mid v\in\mathbb{R}\}$

$$\sigma(U)=S\setminus d=S\cap\underbrace{(\mathbb{R}^3\setminus d)}_{W}$$

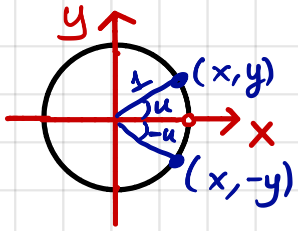
açık $\leftarrow W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\neq 1\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y\neq 0\}$

$\sigma: U\to S\cap W$ 1-1, örten, sürekli bir dönüşüm.

$$\sigma^{-1}: S\cap W\to U, \quad \sigma^{-1}(x,y,z)=\begin{cases}(\arccos x, z), & y\geq 0 \text{ iken}\\ (2\pi-\arccos x, z), & y<0 \text{ iken}\end{cases}$$

$\Downarrow$

σ^{-1} sürekli

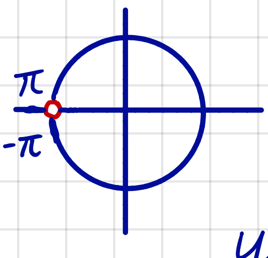


$x=\cos u \Rightarrow u=\arccos x$

$x=\cos(-u)\Rightarrow 2\pi-u=\arccos x$

$\therefore$ σ bir homeomorfizma!

Silindirin açıkta kalan kısmını örtmek için $\tilde{U}=(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ ve $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})=(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, \tilde{v})$ alırsak, yukarıdaki gibi $\tilde{\sigma}$ yaması da 1-1, örten ve sürekli olur. $\tilde{W}=\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-1, y=0\}$.

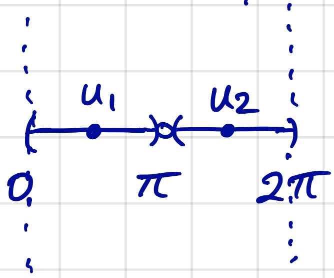


Benzer şekilde $\tilde{\sigma}^{-1}(x,y,z)=\begin{cases}(\arccos x, z), & y\geq 0\\ (-\arccos x, z), & y<0\end{cases}$ fonksiyonunun sürekli olduğu görülür.

Yani, $\tilde{\sigma}$ de bir homeomorfizmadır.

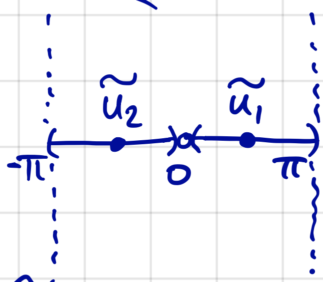
İki yamanın da parametrize ettiği noktaların parametreleri arasındaki geçiş dönüşümü:

$$U \xrightarrow{\sigma} (\cos u, \sin u, v) = (\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, \tilde{v}) \xleftarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{U}$$



$$(\tilde{u}+2\pi, \tilde{v}) \xleftarrow{\phi} (\tilde{u},\tilde{v}) \in (-\pi,0)\times\mathbb{R}$$

$$(\tilde{u},\tilde{v}) \longleftarrow (\tilde{u},\tilde{v}) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}$$



$U = (0,2\pi)\times\mathbb{R}$ $\qquad$ $\tilde{U} = (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$

Yani, $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v}) = \sigma(\phi(\tilde{u},\tilde{v})) = \sigma(u,v)$ noktasını veren parametrelerin ilişkisi

$$(u,v) = \phi(\tilde{u},\tilde{v}) = (\sigma^{-1}\circ\tilde{\sigma})(\tilde{u},\tilde{v}) = \begin{cases} (\tilde{u}+2\pi, \tilde{v}) \ ; & (\tilde{u},\tilde{v}) \in (-\pi,0)\times\mathbb{R}, \\ (\tilde{u},\tilde{v}) \ ; & (\tilde{u},\tilde{v}) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\tilde{V} = (-\pi,0)\times\mathbb{R} \cup (0,\pi)\times\mathbb{R}$$

$$V = (0,\pi)\times\mathbb{R} \cup (\pi,2\pi)\times\mathbb{R}$$

için $\phi : \tilde{V} \longrightarrow V$ <u>düzgün</u> bir geçiş dönüşümü olur, çünkü $\phi|_{(-\pi,0)\times\mathbb{R}}$ ve $\phi|_{(0,\pi)\times\mathbb{R}}$ polinomdur.

Alternatif olarak; aynı $U, \tilde{W}$ için

$$\tilde{\sigma} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \left(\tilde{\sigma}(U) = S \cap \tilde{W} \,! \right)$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \to \left(\cos(\tilde{u}+\pi), \sin(\tilde{u}+\pi), \tilde{v}\right)$$

$$\tilde{\sigma}(\pi, \tilde{v}) = \left(\cos(2\pi), \sin(2\pi), \tilde{v}\right) = (1, 0, v)$$

d doğrusu üzerinde bir nokta verir.

$$\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma(u, v) \iff$$

$$\left(\cos(\tilde{u}+\pi), \sin(\tilde{u}+\pi), \tilde{v}\right) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$\iff u = \tilde{u}+\pi \quad \text{ve} \quad v = \tilde{v}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) &= (\tilde{u}+\pi, \tilde{v}) \\ \Phi^{-1}(u, v) &= (u-\pi, v) \end{aligned}\right\} \text{düzgün geçiş dönüşümleri}$$