4.2. Düzgün Yüzeyler

Diferansiyel Geometride yüzeyleri incelemek için Analiz kullanırız. Bu yüzden bir yüzey üzerinde tanımlı bir fonksiyonun türevi kavramından söz edebilmeliyiz. Bu yüzden yüzeylerimizin yapısal özelliklerinin yeterli olması gerekir. Bu tip yüzeyleri şimdi tanıtacağız.

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ açık $f: U \to \mathbb{R}^n$ bir dönüşüm iken f'nin n bileşeni düzgün ise f'ye düzgün denir. Örneğin, $m=2$ $n=3$ iken $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ ise f'nin kısmî türevleri

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u}\right) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v}\right)$$

var ve sürekli ise f'ye C^1 sınıfından denir. Eğer f'nin her mertebeden kısmî türevleri varsa f'ye C^∞ sınıfından veya düzgün denir.

Notasyon: $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ $\quad f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$ $\quad f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ $\quad f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ vb...

İleri Analiz'den f düzgün ise $f_{uv} = f_{vu}$ olduğunu biliyoruz.

Tanım: $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ yüzey yaması düzgünse ve her $(u,v) \in U$ için σ_u ile σ_v vektörleri lineer bağımsızsa σ'ya düzenli denir.

σ_u ile σ_v lineer bağımsızdır $\Longleftrightarrow$ Her $(u,v) \in U$ için $\sigma_u \times \sigma_v \neq \vec{0}$.

Not: $\sigma_u \times \sigma_v \neq \vec{0}$ şartının faydasını Kısım 4.4'de teğet uzayını çalışırken göreceğiz.

Tanım: S bir yüzey, $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ düzenli bir yüzey yaması iken σ, S'nin bir yaması ise σ'ya S için geçerli bir yama denir.

Düzgün Yüzey: S bir yüzey olsun. S'nin her P noktası için $P \in \sigma(U)$ olacak şekilde geçerli bir $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ yaması varsa S'ye düzgün yüzey denir.

Örnek: $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ olmak üzere $\mathcal{D} = \{A + s\vec{u} + t\vec{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ düzlemi düzgün bir yüzeydir, çünkü $\mathcal{D}$ düzleminin atlasındaki tek yama olan $\sigma(s,t) = A + s\vec{u} + t\vec{v}$ polinomlar tarafından tanımlandığı için düzgündür ve $\sigma_s = \vec{u}$ ile $\sigma_t = \vec{v}$ birbirine dik olduğundan lineer bağımsızdırlar.

Örnek: $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ küresi düzgün yüzeydir, çünkü atlastaki σ ve $\tilde{\sigma}$ yamaları olan;

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \quad \text{ve}$$

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin\varphi)$$

trigonometrik fonksiyonlar tarafından tanımlandığından düzgündür ve her $(\theta, \varphi) \in U = \{(\theta, \varphi) \mid -\pi/2 < \theta < \pi/2 \text{ ve } 0 < \varphi < 2\pi\}$ için $\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos\theta| > 0$ yani $\sigma_\theta \times \sigma_\varphi \neq \vec{0}$ olur.

Örnek: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ silindiri de düzgündür, çünkü atlasındaki iki yama da $\sigma(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ düzgün fonksiyonunun kısıtlanışıdır ve $\sigma_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ ile $\sigma_v = (0,0,1)$ birbirinin katı olamazlar. Yani, $\sigma|_U$ ve $\sigma|_{\tilde{U}}$ düzenli yamalardır.

Önerme 4.2.6 Düzgün bir yüzeyin geçiş dönüşümleri de düzgündür.

İspat: Kısım 5.6'da verilecektir.

Önerme 4.2.7 $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^2$ iki açık ve $\sigma: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ düzenli bir yama olsun. $\phi: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ 1-1, örten, düzgün ve tersi düzgün dönüşümünün tanımladığı $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \phi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^3$ yaması da düzenlidir.

İspat: $\tilde{\sigma}$ düzgün, çünkü iki düzgün fonksiyonun bileşkesi de öyledir. $(u,v) = \phi(\tilde{u},\tilde{v})$ ve $\sigma(u,v) = \tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})$ olduğundan

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \cdot \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \cdot \sigma_v \quad \text{ve} \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \sigma_v \end{aligned}}$$

elde edilir.

Böylece
$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}}_{|J(\phi)| \to \text{Jakobyen matrisin determinantı}} \sigma_u \times \sigma_v \text{ olur.}$$

Kalkülüs $\Rightarrow$ Ψ_1 ve Ψ_2, $\mathbb{R}^2$'nin iki açığı arasında düzgün dönüşümler ise $J(\Psi_1 \circ \Psi_2) = J(\Psi_1) J(\Psi_2)$!

Burada, $\Psi_1 = \phi$ ve $\Psi_2 = \phi^{-1}$ iken $1 = |J(\phi \circ \phi^{-1})| = |J(\phi)| |J(\phi^{-1})|$ olduğundan $J(\phi^{-1}) = J(\phi)^{-1}$ olur. $|J(\phi)| \neq 0$ olduğundan σ düzenli ise $\sigma_u \times \sigma_v \neq \vec{0} \Rightarrow \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \neq \vec{0}$ olacağı için $\tilde{\sigma}$ da düzenlidir.

Tanım: Eğer σ ve $\tilde{\sigma}$ düzenli yamaları bu önermedeki gibi bir ilişkiye sahipse (yani 1-1, örten, düzgün ve tersi düzgün bir ϕ geçiş dönüşümü için $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v}) = \sigma(\phi(\tilde{u},\tilde{v}))$ ise) $\tilde{\sigma}$'ya σ'nın **reparametrizasyonu** adı verilir.

Bu durumda Φ'ya reparametrizasyon dönüşümü denir.
Ayrıca, σ da $\tilde{\sigma}$'nın bir reparametrizasyonu olur.

Öte yandan, $\sigma : U \to S \cap W$ ve $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \to S \cap \tilde{W}$ S düzgün yüzeyinin iki düzenli yaması olsun. $V \subseteq U$ ve $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ açıkları için $\sigma(V) = \tilde{\sigma}(\tilde{V}) = S \cap W \cap \tilde{W}$ ise $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \to V$ geçiş dönüşümü 1-1, örten, düzgün ve tersi düzgün bir fonksiyondur. (Bkz. Önerme 4.2.6)

Dolayısıyla, $\sigma|_V$ ile $\tilde{\sigma}|_{\tilde{V}}$ kısıtlanmış yamaları birbirinin reparametrizasyonudur.

Prensip: Eğer bir özellik düzgün S yüzeyinin düzenli her yaması için tanımlanabilirse ve reparametrizasyon altında değişmezse S'nin bir özelliği olarak tanımlanabilir.

KABUL: Bundan sonra düzgün yüzeyler ve düzenli yamalar ele alınacaktır.

yüzey = düzgün yüzey
yama = düzenli yama.

Aksi belirtilmedikçe tüm yüzeyler "bağlantılı" kabul edilecektir. Yani, S'nin herhangi iki noktası, tamamen S'nin içinde yatan bir eğriyle birleştirilebilir. Şu ana kadar ele aldığımız örnekler arasında sadece çift koni tepe noktası çıkarıldığında bağlantılı olmayan bir yüzey örneğidir.

Her yüzey bağlantılı yüzeylerin birleşimi olduğundan yüzeyin yerel özellikleri bağlantılı kısmı kullanılarak çalışılabilir.

Ör: $f(x,y)$ düzgün bir fonksiyon ise $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y)\}$ kümesi düzgün bir yüzeydir, şöyle ki: $\sigma:\mathbb{R}^2\longrightarrow S$, $\sigma(u,v)=(u,v,f(u,v))$ fonksiyonu 1-1, örten, süreklidir.

$\sigma^{-1}(x,y,z)=(x,y)$ de sürekli olduğu için σ bir yamadır.

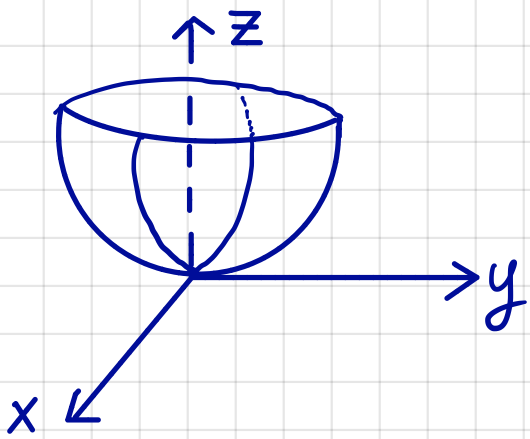
$U=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^3$ için U ile $S\cap W$ homeomorf olduğundan S, atlasında sadece (σ,U) olan bir yüzeydir.

f düzgün olduğundan σ da düzgündür. Ayrıca, $\sigma_u=(1,0,f_u)$ ile $\sigma_v=(0,1,f_v)$ lineer bağımsız olduğundan σ düzenlidir. S'nin atlasındaki her yama düzenli olduğundan S düzgün bir yüzeydir.

Bu şekilde bir çok düzgün yüzey elde edilebilir.

$*$ $f(x,y)=x$ ise elde edilen yüzey ilk düzgün yüzey örneğimiz olan $D=\{(x,y,x)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ düzlemidir. $(x,y,x)=x(1,0,1)+y(0,1,0)=x\vec{u}+y\vec{v}$ ve $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0=0$ yani $\vec{u}\perp\vec{v}$'dir.

$*$ $f(x,y)=x^2+y^2$ ise elde edilen düzgün yüzey



şeklinde bir grafiğe sahiptir.

4.3 Düzgün Dönüşümler:

S_1 ve S_2 düzgün yüzeyler olsun. Şimdiye kadar Öklid uzaylarının ($\mathbb{R}^n$) açık altkümeleri arasında düzgün dönüşümlerin nasıl tanımlandığını öğrendik. Bunu kullanarak S_1 ile S_2 arasındaki bir dönüşümün düzgün olması kavramını tanımlayacağız. Temel prensibimiz gereği bunun için tanımın reparametrizasyondan etkilenmediğini göstermeliyiz.

$\sigma_1 : U_1 \to S_1 \cap W_1$ ve $\sigma_2 : U_2 \to S_2 \cap W_2$ iki yama olmak üzere $f : S_1 \to S_2$ dönüşümü $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \to U_2$'yi verir. $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ sırasıyla σ_1, σ_2'nin reparametrizasyonları $\phi_1 : \tilde{U}_1 \to U_1$ ve $\phi_2 : \tilde{U}_2 \to U_2$ reparametrizasyon dönüşümleri ise

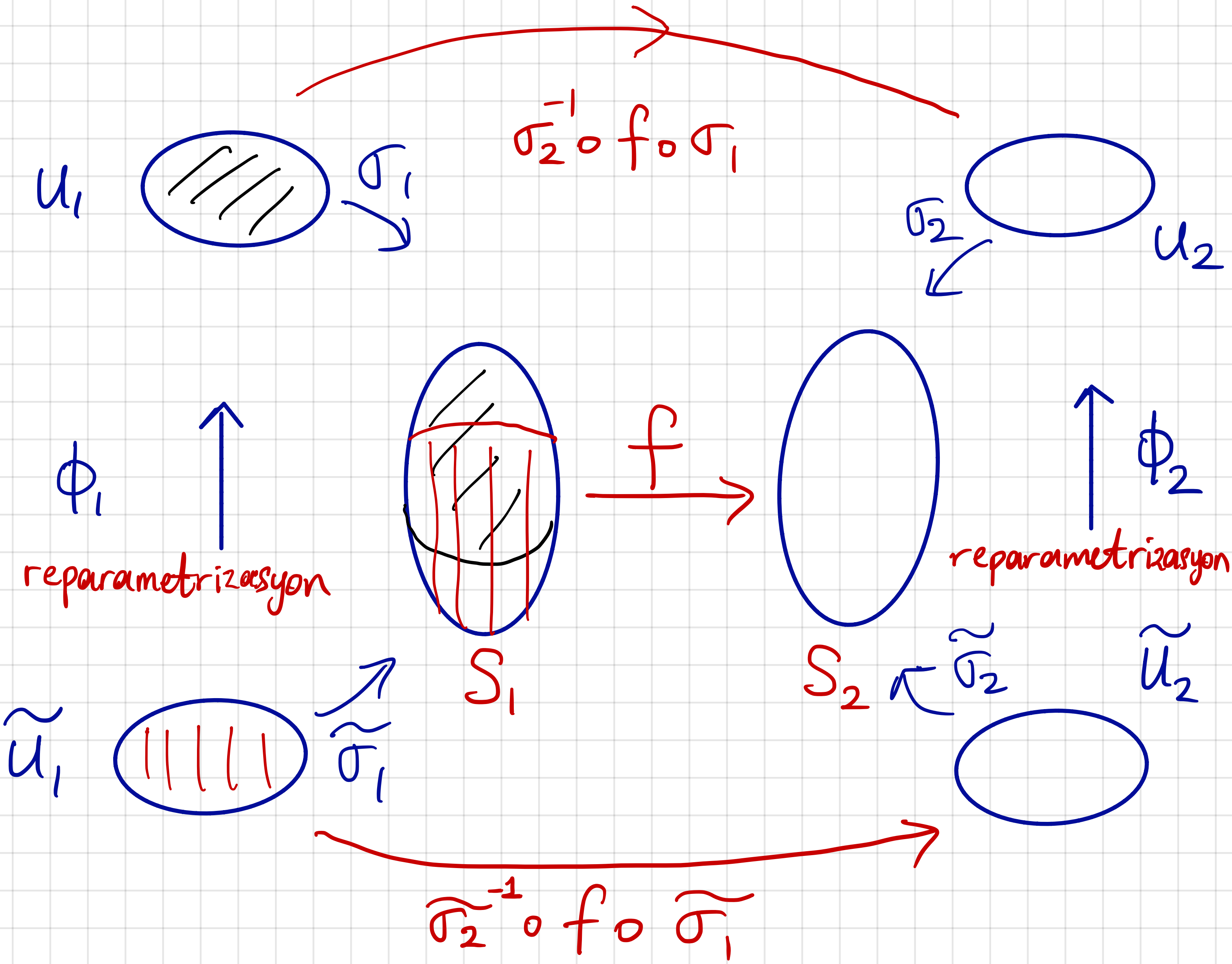
$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = \overbrace{\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2}^{\phi_2^{-1}} \circ \overbrace{\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1}^{} \circ \overbrace{\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1}^{\phi_1}$$

$$= \phi_2^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \phi_1$$

$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1$ düzgündür $\iff$ $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ düzgündür.

* $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ dönüşümünün düzgün olup olmaması reparametrizasyondan bağımsız olur. Bu yüzden, eğer $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ düzgün ise $f|_{\sigma_1(U_1)} : \sigma_1(U_1) \to \sigma_2(U_2)$ düzgün dönüşümdür, denir.

* Eğer, S_1'in her $\sigma_1 : U_1 \to S_1 \cap W_1$ yaması için $f|_{\sigma_1(U_1)}$ düzgün ise f'ye <u>düzgün</u> denir.



Uyarı: Burada

Tanım: S_1 ve S_2 düzgün, $f: S_1 \to S_2$ 1-1 ve örten olsun. Hem f hem de f^{-1} düzgün ise f'ye bir difeomorfizma denir. S_1 ile S_2 arasında bir difeomorfizma varsa S_1 ile S_2'ye difeomorfik yüzeyler denir.

Ör: $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x\}$ ile $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x^2+y^2\}$ yüzeyleri difeomorftur, çünkü

$f:\mathcal{D}\to S$, $f(u,v,u)=(u,v,u^2+v^2)$ fonksiyonu;

$\sigma_S^{-1}\circ f\circ\sigma_D(u,v)=(u,v)$ birim fonksiyonunu verdiğinden düzgündür ve düzgün terse sahiptir.

Soru: $g:\mathcal{D}\longrightarrow S$, $g(u,v,u)=(\underbrace{u-v}_{x},\underbrace{v}_{y},(u-v)^2+v^2)$ bir difeomorfizm mi?

$g^{-1}(x,y,x^2+y^2)=(x+y,y,x+y)=(u,v,u)$ olduğundan g 1-1 ve örtendir. Ayrıca,

- $\sigma_S^{-1}\circ g\circ\sigma_D(u,v)=\sigma_S^{-1}(g(u,v,u))=\sigma_S^{-1}(u-v,v,(u-v)^2+v^2)=(u-v,v)$ fonksiyonu, $F(u,v)=u-v$ ve $G(u,v)=v$ polinom olduğundan, düzgündür.
- $\sigma_D^{-1}\circ g^{-1}\circ\sigma_S(x,y)=\sigma_D^{-1}(g^{-1}(x,y,x^2+y^2))=\sigma_D^{-1}(x+y,y,x+y)=(x+y,y)$ fonksiyonu da polinomlar tarafından belirlendiğinden düzgündür.

Bu yüzden g de bir başka difeomorfizmdir.

Soru: $h:S\longrightarrow\mathcal{D}$, $h(x,y,x^2+y^2)=(x+y,y^2,x+y)$ fonksiyonu bir difeomorfizm midir? Hayır, çünkü h 1-1 değildir. $h(0,1,1)=h(0,-1,1)$. Aslında, h örten de değil, mesela $h(x,y,x^2+y^2)=(0,-1,0)$ olacak $y\in\mathbb{R}$ yok.

- $\sigma_D^{-1}\circ h\circ\sigma_S(x,y)=(x+y,y^2)$ düzgün olduğundan h de düzgün bir dönüşümdür.

Önerme 4.3.1 $f: S_1 \to S_2$ difeomorfizma olsun. Eğer σ_1, S_1 üzerinde geçerli bir yüzey yaması ise $f \circ \sigma_1$ de S_2 üzerinde geçerli bir yüzey yamasıdır.

İspat: S_1 ve S_2'nin birer geçerli yamayla örtüldüğünü kabul edebiliriz. Bunları sırasıyla $\sigma_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ ve $\sigma_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3$ ile gösterirsek f difeomorfizma olduğu için $F(u,v) = \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 (u,v)$ 1-1, örten, düzgün ve tersi düzgün bir fonksiyon olur. $f \circ \sigma_1 (u,v) = \sigma_2(F(u,v))$ yaması Önerme 4.2.7'den dolayı geçerli bir yamadır. $\square$

Yerel Difeomorfizma: $f: S_1 \to S_2$ düzgün dönüşüm olsun. Eğer her $P \in S_1$ için P'yi içeren ve aşağıdakileri sağlayan bir $\mathcal{O} \subseteq S_1$ açık altkümesi varsa f'ye yerel difeomorfizma denir:

1) $f(\mathcal{O}) \subseteq S_2$ açıktır 2) $f|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow f(\mathcal{O})$ bir difeomorfizmadır. (Bir yüzeyin $\mathbb{R}^3$'ün açık altkümeleriyle kesişimi de yani yüzeyin açık altkümeleri de yüzeydir!)

⊛ Her difeomorfizma bir yerel difeomorfizmadır ($\mathcal{O} = S_1$ için).

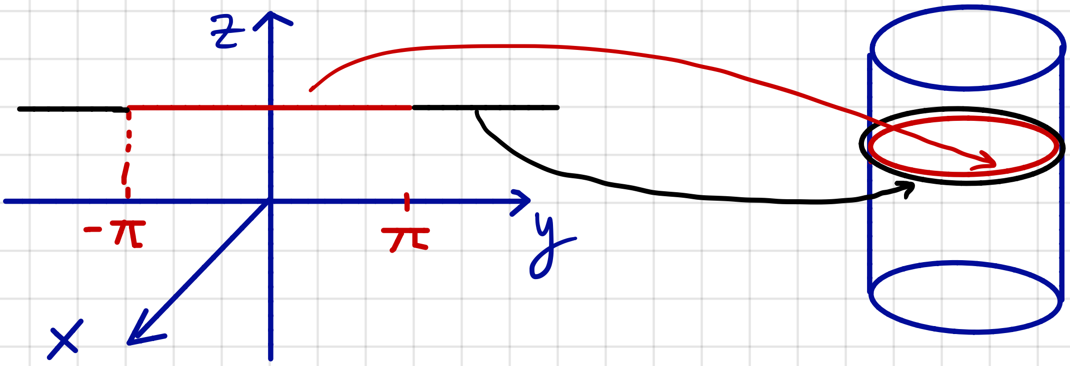
Ayrıca, eğer f'nin σ_1'in görüntüsüne kısıtlanışı 1-1 ise Önerme 4.3.1 yerel difeomorfizmalar için de geçerli olur.

Ör: $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ yz-düzlemi ve

$S = \{ \quad " \quad \mid x^2 + y^2 = 1\}$ silindiri olsun.

$f: \mathcal{D} \to S$, $f(0,y,z) = (\cos y, \sin y, z)$ olsun.

f dönüşümü; düzlemde y-eksenine paralel bir doğruyu silindirin etrafına sarar:



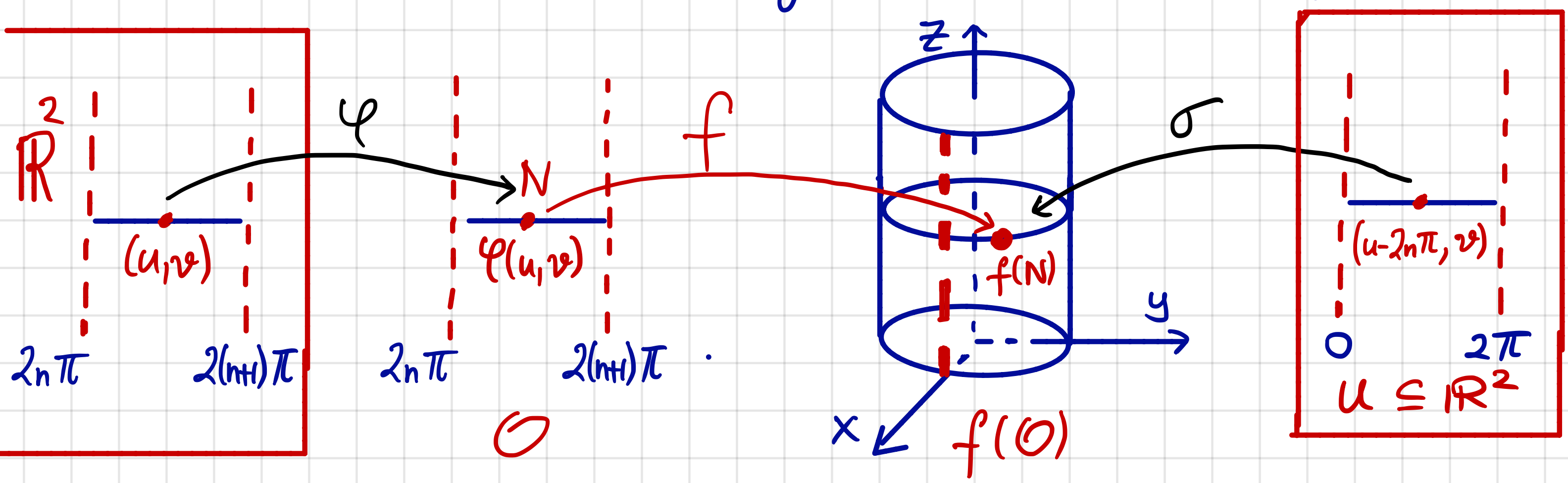
Bu doğru silindirin etrafında birden fazla tur yaptığından f 1-1 değildir. Bu yüzden difeomorfizma olamaz. Aşağıda f'nin yerel difeomorfizma olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{D}$'nin atlasında sadece $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v)=(0,u,v)$ yaması vardır. S'nin atlasında $U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$, $\tilde{U}=(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ ve $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(\tilde{u},\tilde{v})=(\cos\tilde{u},\sin\tilde{u},\tilde{v})$ olmak üzere $(U,\sigma|_U)$ ve $(\tilde{U},\sigma|_{\tilde{U}})$ yamaları vardır.

$\boxed{P=(0,a,b)\in\mathcal{D} \text{ olsun.}}$ a, π'nin çift katı değilse $2n\pi < a < 2(n+1)\pi$ olacak bir $n\in\mathbb{Z}$ vardır.

$2n\pi < u < 2(n+1)\pi$ şartını sağlayan $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ için

$f(\varphi(u,v))=f(0,u,v)=(\cos u,\sin u,v)=\sigma(u-2n\pi,v)$ olur.

$\mathcal{O}=\{(0,y,z)\in\mathcal{D} \mid 2n\pi<y<2(n+1)\pi\}\subset\mathcal{D}$ açığı için



$f|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow f(\mathcal{O}) = \{ f(0,u,v) \mid 2n\pi < u < 2(n+1)\pi \} = \sigma(\mathcal{U})$,

çünkü $\quad f(0,u,v) = \sigma(\underline{u-2n\pi}, v)$ ve $\underline{0 < u-2n\pi < 2\pi}$.

1) $f(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{U})$ açık

2) $\sigma^{-1} \circ f \circ \varphi : \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2n\pi < u < 2(n+1)\pi) \} \longrightarrow \mathcal{U}$

$$(u,v) \longrightarrow (u-2n\pi, v)$$

fonksiyonu polinomlar tarafından tanımlandığı için düzgündür.

$$\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2n\pi < u < 2(n+1)\pi \}$$

$$(u,v) \longrightarrow (u+2n\pi, v)$$

fonksiyonu da aynı sebepten düzgün olur.

Yani, $f|_{\mathcal{O}}$ bir difeomorfizmadır.

$P = (0,a,b) \in \mathcal{D}$ iken a, π'nin tek katı değilse $P \in \tilde{\mathcal{O}} = \{ (0,u,v) \in \mathcal{D} \mid (2n-1)\pi < u < (2n+1)\pi \}$ olacak bir $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{D}$ açığı vardır. Bu taktirde $f(\tilde{\mathcal{O}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{U}})$ olur, çünkü

$f(0,u,v) = \sigma(\underline{u-2n\pi}, v)$ ve $\underline{-\pi < u-2n\pi < \pi}$.

Benzer şekilde $f|_{\tilde{\mathcal{O}}}$'nın da difeomorfizm olduğu görülür.

Dolayısıyla, f bir yerel difeomorfizmadır.

Ör: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, y=x^3\}$

$\sigma:\mathbb{R}^2\longrightarrow S$, $\sigma(u,v)=(u,u^3,v)$ düzgün bir fonksiyondur, çünkü u, u^3 ve v polinomdur.

$\Psi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\Psi(x,y,z)=(x,z)$ düzgün bir fonksiyondur, çünkü x ve z de polinomdur.

$U=\mathbb{R}^2$ için $\sigma(U)=S$ olduğundan $W=\mathbb{R}^3$ için $\sigma(U)=S\cap W$ elde edilir. Düzgün fonksiyonlar sürekli olduğundan $U=\mathbb{R}^2$ ile $S\cap W=S$ homeomorf olur, çünkü $\sigma^{-1}=\Psi|_S$'dir. Dolayısıyla S bir yüzeydir.

$\sigma_u=(1,3u^2,0)$ $\sigma_v=(0,0,1)$ birbirinin katı olmadığı için σ_u ve σ_v doğrusal bağımsızdır. σ düzenli yamadır.

S'nin tek yaması (σ,U) olduğundan S düzgün bir yüzeydir.

İddia: Herhangi bir düzlem S'ye difeomorftur.

İspat: $\mathcal{D}=\{(a_1+b_1s+c_1t,\ a_2+b_2s+c_2t,\ a_3+b_3s+c_3t) \,/\, s,t\in\mathbb{R}\}$ düzlemi; $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, $C=(c_1,c_2,c_3)$ iken birbirine dik $\overrightarrow{OB}$ ile $\overrightarrow{OC}$ birim vektörleri kullanılarak tanımlanabiliyordu.

$$\phi(s,t)=A+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$ $\mathcal{D}$ düzleminin tek yamasıydı.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \ni \phi(s,t) \arrow[r, "f"] & \sigma(u,v) \in S & \\
(s,t) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rrr, dashed, "\sigma^{-1}\circ f\circ\phi"'] & & & (u,v)=(s,t) \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

$$f(\phi(s,t))=f(A+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC})=\sigma(s,t)=(s,s^3,t)$$

fonksiyonu difeomorfizmdir, çünkü $\sigma^{-1}\circ f\circ \phi$ birim fonksiyondur.

Önerme: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z=g(x,y)\}$ düzgün yüzeyi (yani $g(x,y)$ düzgün fonksiyon) bir düzleme difeomorftur.

İspat: $\sigma:\mathbb{R}^2\to S$, $\sigma(u,v)=(u,v,g(u,v))$, yaması S'nin atlasındaki tek düzenli yama idi.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \ni \phi(s,t) \arrow[r, "f"] & S \ni \sigma(u,v) & \\
(s,t) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rrr, dashed, "\sigma^{-1}\circ f\circ\phi \text{ birim}"'] & & & (u,v) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$(u,v)=(s,t)$ alırsak

$f(\phi(s,t))=\sigma(s,t)$ difeomorfizm olur. $\square$

Ör: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

$\tilde{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$ ve

$f: S \to \tilde{S}$, $f(x,y,z) = (x,y,0)$ olsun.

S'nin yamaları; $\sigma(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$,

$U_1 = (0,2\pi) \times \mathbb{R}$ ve $U_2 = (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$ olmak üzere

$\mathcal{A} = \{(U_1, \sigma_{/U_1}), (U_2, \sigma_{/U_2})\}$ atlasının elemanlarıdır.

$\tilde{S}$'nın tek yaması $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u},\tilde{v},0)$, $\tilde{U} = \mathbb{R}^2$

olmak üzere $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U},\tilde{\sigma})\}$ atlasının elemanıdır.

f düzgündür, çünkü $\tilde{\sigma}^{-1} \circ f \circ \underbrace{\sigma(u,v)}_{\underbrace{f(\cos u, \sin u, v)}_{\tilde{\sigma}^{-1}(\cos u, \sin u, 0)}} = (\cos u, \sin u)$

fonksiyonu düzgündür.

f yerel difeomorfizma değildir, çünkü

hangi $O \subset S$ açık altkümesini alırsak alalım S

yüzey olduğu için O'ya homeomorf bir $U \subseteq \mathbb{R}^2$

açığı vardır ki $\tilde{\sigma}^{-1} \circ f \circ \sigma(u,v) = (\cos u, \sin u)$ fonksi-

yonu U'dan $(\tilde{\sigma}^{-1} \circ f \circ \sigma)(U)$'ya birebir değildir.

4.4. Teğetler ve Türevler

Bir yüzeyi çalışmanın doğal bir yolu üzerindeki eğrileri kullanmaktır. Bu sayede teğet vektörden bahsedilebilir.

Tanım: S bir yüzey, $P \in S$ olsun. P'den geçen bir eğrinin P'deki teğet vektörüne S'nin P'deki bir teğet vektörü denir. S'nin P'deki tüm teğet vektörlerinin oluşturduğu kümeye S'nin P'deki **teğet düzlemi** denir ve T_pS ile gösterilir. (Aşağıda T_pS'nin 2 boyutlu bir altuzay olduğunu göstereceğiz).

Teğet düzlemini anlamak için P'yi örten bir $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ yaması seçelim. $\sigma(u_0, v_0) = P$ olsun. Eğer γ, S'de yatıyor ve $t = t_0$ anında P'den geçiyorsa $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ ve t_0 civarındaki her t için $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ olacak şekilde $u(t)$ ile $v(t)$ fonksiyonları vardır. Bunların düzgün olduğunu Bölüm 5.6'da göstereceğiz. Tersine, $t \to (u(t), v(t))$ düzgün fonksiyonu varsa $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ formülü S'de yatan (düzgün) bir eğri tanımlar.

Önerme 4.4.2 $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$, S'nin P noktasını örten bir yaması, $\sigma(u_0, v_0) = P$ olsun. T_pS kümesi $\mathbb{R}^3$'ün; $\sigma_u|_{(u_0,v_0)}$ ile $\sigma_v|_{(u_0,v_0)}$ vektörleri tarafından gerilen altuzayıdır.

Quiz Sorusu: S bir yüzey, $\mathcal{O} \subset S$ açık altkümesi olsun. $\mathcal{O}$ da bir yüzeydir, gösteriniz.

Yanıt: $\mathcal{O}$'nun açık olması $\mathbb{R}^3$'ün bir W açık altkümesi için $\mathcal{O} = W \cap S$ olması demektir. $p \in \mathcal{O}$ iken S yüzey olduğundan p'yi içeren bir $W_p \subseteq \mathbb{R}^3$ açığı için $\sigma : U_p \to S \cap W_p$ homeomorfizmi vardır.
$\mathbb{R}^3$'teki iki açığın kesişimi de açık olacağından, $\mathcal{O} \cap W_p \subseteq \mathbb{R}^3$ altkümesi p'yi içeren bir açıktır.
σ sürekli olduğundan $V_p = \sigma^{-1}(\mathcal{O} \cap W_p)$ de $\mathbb{R}^2$'nin bir açığıdır. Şu halde; $\sigma_{|V_p} : V_p \longrightarrow \mathcal{O} \cap W_p$ bir homeomorfizm olacağı için $\mathcal{O}$ bir yüzeydir.

ÖDEV: $p \in \mathcal{O}$ ise $T_p\mathcal{O} = T_pS$'dir, gösteriniz.

Kanıt: $\gamma(t)=\sigma(u(t),v(t))$, S üzerinde bulunan ve P'den geçen düzgün eğri olsun. $\dot\gamma=\sigma_u\dot u+\sigma_v\dot v$ olur. Yani, γ'nın $\gamma(t_0)=P$'deki teğet vektörü;

$$\dot\gamma(t_0)=\underbrace{\sigma_u(u(t_0),v(t_0))}_{\in\mathbb{R}^3}\underbrace{\dot u(t_0)}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{\sigma_v(u(t_0),v(t_0))}_{\in\mathbb{R}^3}\underbrace{\dot v(t_0)}_{\in\mathbb{R}}$$

$\sigma_u(u(t_0),v(t_0))$ ve $\sigma_v(u(t_0),v(t_0))$ vektörlerinin bir doğrusal bileşimidir, yani T_pS bu iki vektörün gerdiği altuzayın içinde bulunur.

Eşitliği göstermek için, bu altuzaydan herhangi bir $\vec{w}=\lambda\sigma_u(u(t_0),v(t_0))+\mu\sigma_v(u(t_0),v(t_0))$ vektörünü alıp, T_pS'nin elemanı olduğunu gösterelim.

$u(t):=\lambda t+u_0$ ve $v(t):=\mu t+v_0$ için

$\gamma(t)=\sigma(u(t),v(t))$ eğrisi düzgündür, çünkü σ ile u ve v polinomları düzgün fonksiyonlardır. α eğrisinin $\gamma(0)=\sigma(u(0),v(0))=\sigma(u_0,v_0)=P$ noktasındaki teğet vektörü $\dot\gamma(0)=\sigma_u(u_0,v_0)\dot u(0)+\sigma_v(u_0,v_0)\dot v(0)=\vec{w}$ olur. $\square$

Uyarı: 1) S düzgün olduğundan, σ düzenli ve dolayısıyla σ_u ile σ_v doğrusal bağımsızdır. Bu yüzden gerdikleri T_pS altuzayı 2 boyutludur ve <u>teğet düzlemi</u> denir.

2) Önermenin ifadesinde σ yaması kullanıldığı için çok açık olmasa bile teğet düzlemin kullanılan yamadan bağımsız olduğu T_pS'nin tanımından anlaşılmaktadır.

3) S'nin $\sigma(u_0,v_0)=P$'deki teğet düzleminin bazı olan vektörler; $u \xrightarrow{\alpha} \sigma(u,v_0)$ ve $v \xrightarrow{\beta} \sigma(u_0,v)$ parametre eğrilerinin teğet vektörleridir:

$$\alpha(u)=\sigma(u,v_0), \quad \beta(v)=\sigma(u_0,v) \text{ ve } u(u_0)=P=\beta(v_0)$$

olduğundan $\dot{\alpha}(u_0)=\sigma_u(u_0,v_0)$ ve $\dot{\beta}(v_0)=\sigma_v(u_0,v_0)$ olur.

$f: S \to \tilde{S}$ düzgün dönüşümü ve $P \in S$ verilsin.

$w \in T_pS$ ise $\gamma(t_0)=P$ olacak bir $\gamma \subset S$ eğrisi için $w=\dot{\gamma}(t_0)$ olur. $\tilde{\gamma}(t)=f(\gamma(t))$ eğrisi $\tilde{S}$ yüzeyinde yatar ve $\tilde{\gamma}(t_0)=f(P)$'den geçer. Dolayısıyla,

$$\tilde{w}=\dot{\tilde{\gamma}}(t_0) \in T_{f(P)}\tilde{S} \text{ olur.}$$

Tanım: $D_pf: T_pS \longrightarrow T_{f(P)}\tilde{S}, \quad D_pf(w):=\tilde{w},$

dönüşümüne f'nin P noktasındaki türevi denir.

Uyarı: Tanım sadece f, P ve w'ya bağlıdır, w'yı veren γ eğrisine değil. Şöyle ki;

$\sigma: U \to \mathbb{R}^3$, S'nin P'yi örten bir yaması, $\sigma(u_0,v_0)=P$ olsun. $\tilde{\sigma}: \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{S}$'nin $f(P)$'yi örten bir yaması ise

$F:=\tilde{\sigma}^{-1}\circ f\circ\sigma : U \to \tilde{U}$, $F(u,v)=(F_1(u,v), F_2(u,v))$ düzgün olur ve $\tilde{\sigma}\circ F(u,v)=f\circ\sigma(u,v)$ elde edilir.

$w=\lambda\sigma_u(u_0,v_0)+\mu\sigma_v(u_0,v_0) \in T_pS$ elemanı $\gamma(t)=\sigma(u(t),v(t))$ eğrisinin P'deki teğet vektörü olsun. $(\dot{u}(t_0)=\lambda, \dot{v}(t_0)=\mu)$

$$\tilde{\gamma}(t)=f(\gamma(t))=f(\sigma(u(t),v(t)))=\tilde{\sigma}(F(u(t),v(t)))$$

eğrisi $f(P)$'den geçer ve $\tilde{S}$ üzerinde bulunur.

$D_pf(w) = \dot{\tilde{\gamma}}(t_0)$ ve $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\sigma}(\underbrace{F_1(u(t),v(t))}_{\tilde{u}}, \underbrace{F_2(u(t),v(t))}_{\tilde{v}})$

olduğundan $\tilde{w} = \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0) \cdot \dot{\tilde{u}}(t_0) + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)\,\dot{\tilde{v}}(t_0)$ olur.

$$\dot{\tilde{u}} = \frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \dot{u} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \dot{v} \Rightarrow \dot{\tilde{u}}(t_0) = \frac{\partial F_1}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)} \lambda + \frac{\partial F_2}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)} \mu$$

$$\dot{\tilde{v}} = \frac{\partial F_2}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \dot{v} \Rightarrow \dot{\tilde{v}}(t_0) = \frac{\partial F_2}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)} \lambda + \frac{\partial F_2}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)} \mu.$$

Dolayısıyla, $\tilde{w}$ vektörü f, P, $\underbrace{\lambda \text{ ve } \mu\text{'ye}}_{w\text{'ya}}$ bağlı !

NOT: T_pS'nin bazı olarak $\mathcal{B} = \{\dot{\alpha}(u_0), \dot{\beta}(v_0)\}$ kümesini, $T_{f(P)}\tilde{S}$'nın bazı olarak da $\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{u}_0) = \tilde{\sigma}_{\tilde{u}}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ ve

$\dot{\tilde{\beta}}(\tilde{v}_0) = \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$ olmak üzere $\tilde{\mathcal{B}} = \{\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{u}_0), \dot{\tilde{\beta}}(\tilde{v}_0)\}$'yi alırsak; her $w = \lambda\,\dot{\alpha}(u_0) + \mu\,\dot{\beta}(v_0) \in T_pS$ teğet vektörünün D_pf altındaki görüntüsünün

$$\tilde{w} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)} \lambda + \frac{\partial F_2}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)} \mu\right)\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{u}_0) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)} \lambda + \frac{\partial F_2}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)} \mu\right)\dot{\tilde{\beta}}(\tilde{v}_0)$$

şeklinde olduğu görülür ki böylece

$$[\tilde{w}]_{\tilde{\mathcal{B}}} \underset{*}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0,v_0)}}_{F\text{'nin Jakobyeni}} \cdot [w]_{\mathcal{B}}$$ elde edilir.

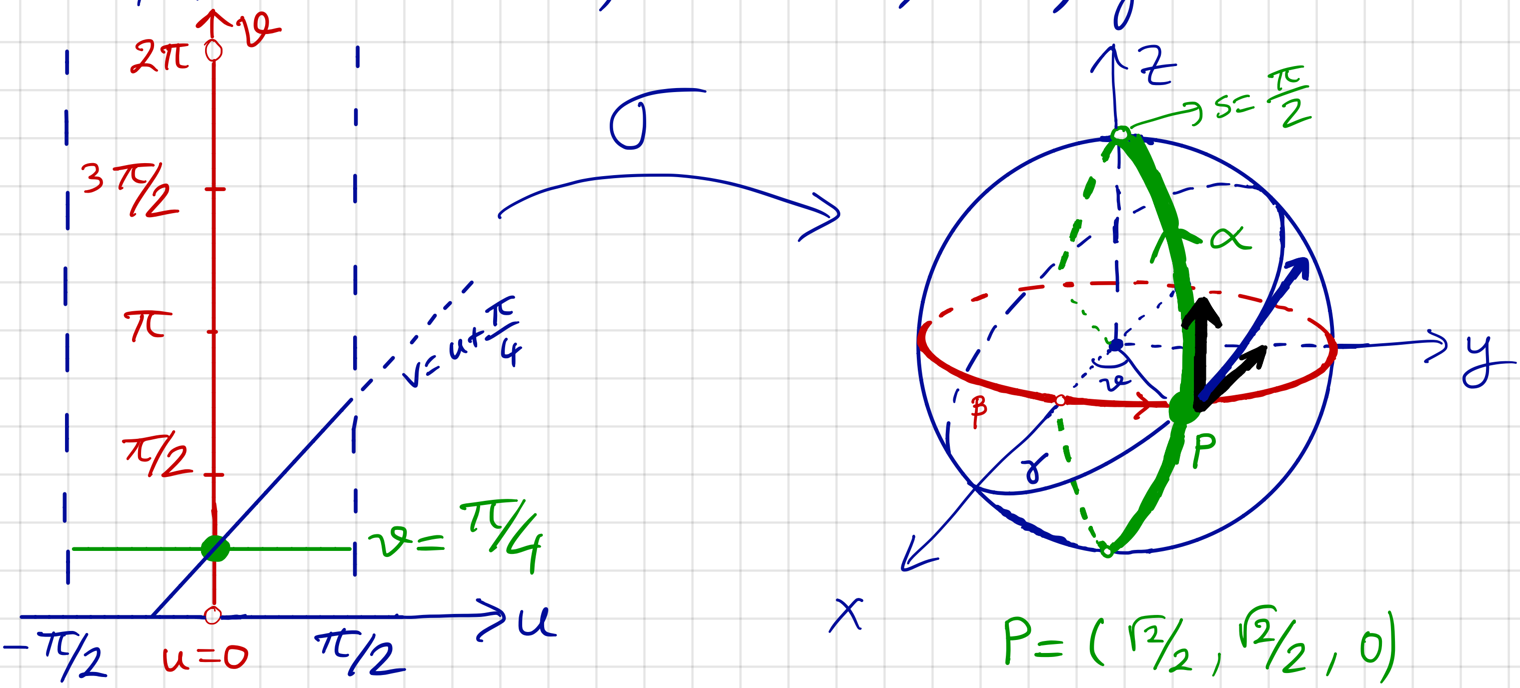
Önerme 4.4.4. $f: S \to \tilde{S}$ düzgün $\Rightarrow$ D_pf lineer'dir.

İspat: Yukarıdaki $*$ matris çarpımı lineer dönüşüm verir.

Ör: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

$U=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)$ olmak üzere $\sigma:U\to S$,

$\sigma(u,v)=(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin u)$ yamasını alalım.



- $u(s)=s$ $\quad v(s)=\frac{\pi}{4}$ ise $\alpha(s)=\sigma(s,\pi/4)=(\frac{\sqrt2}{2}\cos s,\ \frac{\sqrt2}{2}\cos s,\ \sin s)$

çemberi S küresiyle $y=x$ düzleminin kesişimiyken,

- $u(t)=0$ $\quad v(t)=t$ ise $\beta(t)=\sigma(0,t)=(\cos t,\sin t,0)$

çemberi S küresiyle $z=0$ düzleminin kesişimidir.

$\dot\alpha(0)=(-\frac{\sqrt2}{2}\sin 0,\ -\frac{\sqrt2}{2}\sin 0,\ \cos 0)=(0,0,1)$; $\dot\beta(\pi/4)=(-\sin\pi/4,\ \cos\pi/4,\ 0)=(-\sqrt2/2,\ \sqrt2/2,\ 0)$.

$\vec{w}=(-\sqrt2,\sqrt2,2)$ vektörü $\sigma(0,\frac{\pi}{4})=P$ noktasında bir teğet vektörüdür,

çünkü $\vec{w}=2\dot\beta(\pi/4)+2\dot\alpha(0)$ vektörü

$\gamma(t)=\sigma(2t,2t+\pi/4)=(\cos 2t\cos(2t+\pi/4),\ \cos 2t\sin(2t+\pi/4),\ \sin 2t)$

eğrisinin $t=0$'daki teğet vektörüdür:

$$\dot\gamma(0)=\underbrace{\sigma_u(0,\pi/4)}_{\dot\alpha(0)}\cdot 2+\underbrace{\sigma_v(0,\pi/4)}_{\dot\beta(\pi/4)}\cdot 2$$

Ör: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x\}$ $\sigma(u,v)=(u,v,u)$

$\tilde{S}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x^2+y^2\}$ $\tilde{\sigma}(\tilde{u},\tilde{v})=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)$

$f:S\to\tilde{S}$, $f(u,v,u)=(u,v,u^2+v^2)$ olsun.

$F(u,v)=\tilde{\sigma}^{-1}(f(\sigma(u,v)))=\tilde{\sigma}^{-1}(u,v,u^2+v^2)=(u,v)$ olur.

F birim fonksiyon olduğundan f ve f^{-1} düzgündür.

$\beta(v)=\sigma(u_0,v)=(u_0,v,u_0)$ $\dot{\beta}(v_0)=(0,1,0)$

$\alpha(u)=\sigma(u,v_0)=(u,v_0,u)$ $\dot{\alpha}(u_0)=(1,0,1)$

$T_pS=\{\lambda\dot{\alpha}(u_0)+\mu\dot{\beta}(v_0) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}=\{(\lambda,\mu,\lambda) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}=S.$

$w=\lambda\dot{\alpha}(u_0)+\mu\dot{\beta}(v_0)\in T_p(S)$ vektörü $\gamma(t)=\sigma(\lambda t+u_0,\mu t+v_0)$ eğrisinin teğet vektörüdür, çünkü $w=\dot{\gamma}(0)$'dır.

$\tilde{\gamma}(t)=f(\gamma(t))=(\lambda t+u_0,\mu t+v_0,(\lambda t+u_0)^2+(\mu t+v_0)^2)$ olur.

$\dot{\tilde{\gamma}}(t)=(\lambda,\mu,2(\lambda t+u_0).\lambda+2(\mu t+v_0).\mu)$ olduğundan

$\tilde{w}=D_pf(w)=\dot{\tilde{\gamma}}(0)=(\lambda,\mu,2\lambda u_0+2\mu v_0)$ elde edilir.

$\tilde{\alpha}(\tilde{u})=f(\alpha(u))=(u,v_0,u^2+v_0^2)$ $\dot{\tilde{\alpha}}(u_0)=(1,0,2u_0)$

$\tilde{\beta}(v)=f(\beta(v))=(u_0,v,u_0^2+v^2)$ $\dot{\tilde{\beta}}(v_0)=(0,1,2v_0)$

olduğundan $\tilde{w}=\lambda(1,0,2u_0)+\mu(0,1,2v_0)=\lambda\dot{\tilde{\alpha}}(u_0)+\mu\dot{\tilde{\beta}}(v_0)$

Demek ki, $\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\end{bmatrix}$

$$J_{(u_0,v_0)}(F)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$P=(u_0,v_0,u_0)$

Ör: $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=x+1\}$ $\quad P=(0,0,1)$

$\mathcal{D}$'nin P'deki teğet uzayı = ?

$\sigma(u,v)=(u,v,u+1)$ $\quad \sigma(0,0)=(0,0,1)=P$ 'dir.

$\sigma_u(u,v)=(1,0,1)$ $\quad \sigma_v(u,v)=(0,1,0)$ olduğundan, $\mathcal{D}$'nin P'deki teğet düzlemi, $T_P\mathcal{D}=\{(\lambda,\mu,\lambda) \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ şeklindedir.

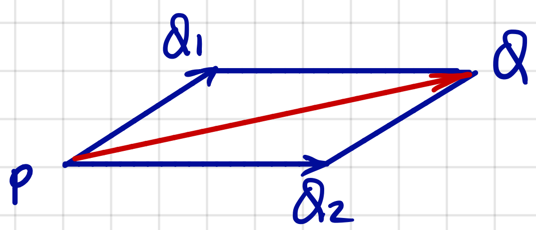
$\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^3$ (Afin uzay) $\quad (T_P\mathcal{D},+,\cdot)\subseteq(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ vektör uzayı.

$\Downarrow$

$Q=(\lambda,\mu,\lambda+1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=(\lambda,\mu,\lambda)\in T_P\mathcal{D}$

$\therefore T\mathcal{D}_P=\{\overrightarrow{PQ} \mid Q\in\mathcal{D}\} \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \{Q-P\in(\mathbb{R}^3,+,\cdot) \mid Q\in\mathcal{D}\}=T_P\mathcal{D}$

- $\overrightarrow{PQ_1}\oplus\overrightarrow{PQ_2}:=\overrightarrow{PQ}$ (burada $Q=Q_1+Q_2-P$)
- $k\odot\overrightarrow{PQ}:=\overrightarrow{PQ'}$ (burada $Q'=kQ-(k-1)P$)



$P=(p_1,p_2)$ $\quad Q_1=(u_1,v_1)$ $\quad Q_2=(u_2,v_2)$

$\Downarrow$

$Q=(\underbrace{u_1+u_2-p_1}_{x},\ \underbrace{v_1+v_2-p_2}_{y},\ \underbrace{u_1+u_2-p_1+1}_{z=x+1})\in\mathcal{D}.$

$(T\mathcal{D}_P,\oplus,\odot)$ ile $(T_P\mathcal{D},+,\cdot)$ izomorf vektör uzayları

Önerme 4.4.5

i) $f: S \to S$ birim dönüşüm ise $D_p f: T_pS \to T_pS$ de öyledir.

ii) $f_1: S_1 \to S_2$ ve $f_2: S_2 \to S_3$ düzgün dönüşümler ise her $P \in S_1$ için $D_p(f_2 \circ f_1) = D_{f_1(p)} f_2 \circ D_p f_1$ 'dir.

iii) $f: S_1 \to S_2$ difeomorfizm ise her $P \in S_1$ için $D_p f$ tersinirdir.

Kanıt: i) Açık.

ii) $w \in T_p S_1$, S_1 üzerindeki γ_1 eğrisinin P noktasındaki teğet vektörü olsun. O zaman, $D_p f_1(w)$ de S_2 üzerindeki $\gamma_2 = f_1(\gamma_1)$ eğrisinin teğet vektörüdür. Ayrıca, $(D_{f_1(p)} f_2 \circ D_p f_1)(w)$ vektörü $\gamma_3 = f_2(\gamma_2) = f_2 \circ f_1(\gamma_1)$ eğrisinin teğet vektörüdür:

$$S_1 \xrightarrow{f_1} S_2 \xrightarrow{f_2} S_3 \qquad T_pS_1 \xrightarrow{D_p f_1} T_{f_1(p)} S_2 \xrightarrow{D_{f_1(p)} f_2} T_{f_2(f_1(p))} S_3$$

$$\gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \qquad w \to D_p f_1(w) \to D_{f_1(p)} f_2 (D_p f_1(w))$$

$$S_1 \xrightarrow{f_2 \circ f_1} S_3 \qquad T_pS_1 \xrightarrow{D_p(f_2 \circ f_1)} T_{f_2(f_1(p))} S_3$$

$$\gamma_1 \longrightarrow \gamma_3 \qquad w \longrightarrow D_p(f_2 \circ f_1)(w)$$

olur.

Her $w \in T_p S_1$ için $D_p(f_2 \circ f_1)(w) = \left(D_{f_1(p)} f_2 \circ D_p f_1\right)(w)$ olur.

iii) $g: S_2 \to S_1$ düzgün dönüşümü f'nin tersi ise $f \circ g: S_2 \to S_2$ ve $g \circ f: S_1 \to S_1$ birim dönüşümlerdir.

i) ve ii)'den, $\left.\begin{aligned} D_p(g \circ f) &= D_{f(p)} g \circ D_p f \\ D_{f(p)}(f \circ g) &= D_p f \circ D_{f(p)} g \end{aligned}\right\}$ birim dönüşüm olacağından

$D_p f$ ile $D_{f(p)} g$ dönüşümleri birbirinin tersi olur. □

Önerme 4.4.6 $f: S \to \tilde{S}$ düzgün dönüşüm olsun. f yerel difeomorfizmdir $\Leftrightarrow$ Her $p \in S$ için $D_p f: T_p S \to T_{f(p)} \tilde{S}$ tersinirdir (denk olarak izomorfizmdir).

İspat: ($\Rightarrow$:)

f yerel difeomorfizm ve $p \in S$ olsun. O zaman S'nin p'yi içeren bir $\mathcal{O}$ açık altkümesi vardır ki $f(\mathcal{O})$ da $\tilde{S}$'nın bir açık altkümesidir ve $f|_{\mathcal{O}}: \mathcal{O} \to f(\mathcal{O})$ bir difeomorfizmdir.

Önerme 4.4.5 (iii)'den $D_p(f|_{\mathcal{O}}): T_p \mathcal{O} \to T_{f(p)} f(\mathcal{O})$ tersinirdir. Bu ise; $T_p \mathcal{O} = T_p S$ ve $T_{f(p)} f(\mathcal{O}) = T_{f(p)} \tilde{S}$ olduğundan, $D_p f: T_p S \to T_{f(p)} \tilde{S}$'nin tersinir olması demektir.

$\Leftarrow$: Ters fonksiyon Teoremi gerektirdiğinden sonra verilecek.

Ör: $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$; $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$P = (0,0,1) \in S_1$ ve $f: S_1 \to S_2$, $f(0,y,z) = (\cos y, \sin y, z)$ için $D_p f: T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$ birim dönüşüm, f difeomorfizm değil ama yerel difeomorfizmdir.

4.5. Normaller ve Yönlendirilme

Bir S yüzeyinin $p \in S$ noktasındaki T_pS teğet düzlemine dik iki birim vektör vardır. Bunlardan, $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ yaması ile elde edilen

$N_\sigma = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ vektörüne S'nin p'deki standart birim normali denir. (Burada $\sigma(u_0, v_0) = p$ olmak üzere σ_u ve σ_v gösterimi $\sigma_u(u_0,v_0)$ ve $\sigma_v(u_0,v_0)$'ın kısaltmak amacıyla kullanılmıştır.)

Uyarı: N_σ teğet düzleminin aksine σ'ya bağlıdır. $\tilde{\sigma}: \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ yaması da p'yi örtüyorsa Önerme 4.2.7'de ϕ geçiş dönüşümü ve $J(\phi)$ onun Jakobyeni olmak üzere $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = |J(\phi)| \, \sigma_u \times \sigma_v$ eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlamıştık.

Bu durumda, $N_{\tilde{\sigma}} = \pm N_\sigma$ olur. Buradaki işaret $|J(\phi)|$ determinantının işaretidir.

Tanım: S yüzeyinin içindeki yamalar arası geçiş dönüşümlerinin Jakobyenlerinin determinantları pozitif olacak şekilde bir atlası varsa S'ye yönlendirilebilir denir.

Ör: Tek yamaya sahip $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ düzgün yüzeylerinin hepsi yönlendirilebilir.

Önerme 4.5.2 S, bir önceki tanımdaki özellikte bir $\mathcal{A}$ atlasına sahip yönlendirilebilir bir yüzey olsun. O zaman, S'nin her noktasına $\mathcal{A}$'nın herhangi bir yamasının standart birim normalini iliştiren fonksiyon düzgündür.

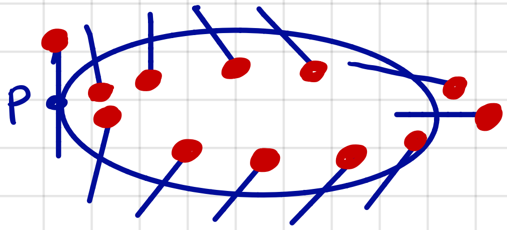
Tanım: $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümünün her bileşeni $S \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyon ise N'ye düzgün dönüşüm denir.

Tanım: Eğer S'nin her p noktası için T_pS'ye dik bir $N(p)$ birim vektörü veren bir $N : S \to \mathbb{R}^3$ düzgün dönüşümü varsa S'ye yönlendirilmiş yüzey denir.

Not: 1) Önerme 4.5.2 yönlendirilebilir bir yüzeyin yönlendirilmiş olduğunu gösterir; çünkü $N(p)$ olarak herhangi bir σ yamasının p'deki standart birim normalini alırsak $N : S \to \mathbb{R}^3$, $N(p) = N_\sigma(p)$ düzgün dönüşümünü elde ederiz.

2) Tersine, yönlendirilmiş her yüzey de yönlendirilebilir. Bunu görmek için S'nin bir $\mathcal{A}$ maksimal atlasını alalım. $\sigma \in \mathcal{A}$ için $\sigma_u \times \sigma_v$ (vektör alanı) N'nin σ'nın görüntüsündeki her noktasında pozitif bir katı ise σ'yı tutalım yoksa $\mathcal{A}$'dan atalım. Böyle elde edilen atlastaki yamaların Jakobyenlerinin determinantı pozitif olur. (ödev: Yamalar niçin bir atlas verir?)

Ör: Möbius band; bir ℓ doğru parçasının P orta noktasının bir çember etrafında aşağıdaki biçimde döndürülmesiyle elde edilir:



P çember etrafında bir tur atınca ℓ başaşağı olur.

Çemberi xy-düzlemindeki $x^2+y^2=1$ birim çemberi alırsak, ℓ'yi de orta noktası $P=(1,0,0)$, uzunluğu 1 ve z-eksenine paralel olan doğru parçası alırsak Möbius bandının bir parametrizasyonu şu şekilde bulunur.

P çember etrafında θ radyan dönünce ℓ, P etrafında $\theta/2$ radyan döner.

ℓ doğrusu z-eksenine paralel olduğundan doğrultu vektörü $(0,0,1)$'dir. $P=(1,0,0)$'dan geçtiği için bir parametrizasyonu $(x,y,z)=(1,0,0)+t(0,0,1)$ şeklindedir.

P orta nokta olduğundan $\ell=\{(1,0,t) \mid -\frac{1}{2}\leq t\leq \frac{1}{2}\}$ olur.

$P_t=(1,0,t)$'nin çember etrafında θ radyan dönmesi sonucu elde edilen noktanın koordinatları:

$$\sigma(t,\theta)=\left(\left(1-t\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta,\left(1-t\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

olur.

$$U=\{(t,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid -1/2\leq t\leq 1/2,\ 0<\theta<2\pi\}$$

$$\tilde{U}=\{(t,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid -1/2\leq t\leq 1/2,\ -\pi<\theta<\pi\}$$

için $\mathcal{A} = \{(\sigma, u), (\sigma, \tilde{u})\}$ atlasıyla birlikte Möbius bandı bir düzgün yüzeydir (ÖDEV!)

$\sigma(0,\theta)$ noktasındaki türevler şu şekildedir:

$$\sigma_t(0,\theta) = \left(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, -\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$\sigma_\theta(0,\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$. Dolayısıyla

$$\sigma_t(0,\theta) \times \sigma_\theta(0,\theta) = \left(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ olur.}$$

Bu vektörün boyu 1 olduğundan N_σ'ya eşittir.

$\mathcal{M}$ Möbius bandı yönlendirilebilir olsaydı, $\mathcal{M}$'nin her noktasında bir birim normal vektör veren düzgün bir $N: \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü olurdu. O zaman $\sigma(0,\theta)$ noktasındaki birim normal $N(\sigma(0,\theta)) = \lambda(\theta) N_\sigma$ olurdu. N düzgün olduğundan $\lambda: (0,2\pi) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da düzgün olur. İki normal de birim uzunlukta olduğundan $\lambda(\theta) = \mp 1$ olmak zorunda. λ sürekli olduğundan ya hep $\lambda(\theta) = 1$ ya da $\lambda(\theta) = -1$ olur.

Her $\theta \in (0,2\pi)$ için $\lambda(\theta) = 1$, yani $N(\sigma(0,\theta)) = N_\sigma$ ise $\sigma(0,0) = \sigma(0,2\pi)$ noktasında,

$$N = \lim_{\theta\to 0^+} N_\sigma = (-1,0,0) \quad \text{ve} \quad N = \lim_{\theta \to 2\pi^-} N_\sigma = (1,0,0)$$

çelişkisi elde edilir.

BÖLÜM 5: Yüzey Örnekleri

5.1 Seviye Yüzeyleri:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ kümesine seviye yüzeyi denir.

Özel hal: $f(x,y,z) = g(x,y) - z$ ve $g(x,y)$ düzgün.

Theorem 5.1.1

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun. Eğer her $p \in S$ için p'yi içeren bir $W \subseteq \mathbb{R}^3$ açığı ve $f: W \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu için i) $S \cap W = \{(x,y,z) \in W \mid f(x,y,z) = 0\}$ ve

ii) $\nabla f|_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_p \neq 0$ ise

S bir düzgün yüzeydir.

Ör: 1) Düzlemler: Her $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ düzlemi $W = \mathbb{R}^3$,

$f(x,y,z) = ax + by + cz + d$ ve $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ olmak üzere

$\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ şeklindedir.

$\nabla f = (a,b,c) \neq (0,0,0)$ olduğundan $\mathcal{D}$ düzgün yüzeydir.

$N: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ sabit fonksiyonu düzgündür.

$$p \to N(p) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Her $p \in \mathcal{D}$ için $T_p\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$'ye paralel orijinden geçen düzlem olduğundan $N(p) \perp T_p\mathcal{D}$ olur. $\mathcal{D}$ yönlendirilmiş yüzeydir.

Ör: $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=0\}\setminus\{(0,0,0)\}$

$W=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ ve $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ için

$K=K\cap W=\{(x,y,z)\in W \mid f(x,y,z)=0\}$ olur.

Ayrıca, $\nabla f=(2x,2y,-2z)=(0,0,0) \Leftrightarrow P=(0,0,0)$'dır

olduğundan her $P\in K$ için $\nabla f|_P\neq 0$ elde edilir.

$K=K^+\cup K^-$ konisinin iki yaması $\sigma^{\pm}(u,v)=(u,v,\pm\sqrt{u^2+v^2})$

şeklindeydi. $\sigma_u^{\pm}=\left(1,0,\pm\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$ ve $\sigma_v^{\pm}\left(0,1,\frac{\pm v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$ idi.

$P=(u,v,\pm\sqrt{u^2+v^2})$ için $\nabla f|_P=\left(2u,2v,\mp 2\sqrt{u^2+v^2}\right)$ olur.

$\nabla f|_P\cdot\sigma_u^{\pm}=2u-2u=0$ ve $\nabla f|_P\cdot\sigma_v^{\pm}=2v-2v=0$ olduğundan

$\nabla f|_P$ vektörü T_PK'ya diktir. $N:K\to\mathbb{R}^3$ dönüşümünü

$N(p)=\dfrac{\nabla f|_P}{\|\nabla f|_P\|}$ olarak alırsak, $N(x,y,z)=\dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

dönüşümü $(0,0,0)$ dışındaki noktalarda düzgün olduğundan

K yönlendirilmiş bir yüzeydir.