Cebirsel Eğriler

1.2 Afin Uzay ve Cebirsel Kümeler

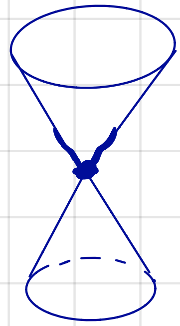
k bir cisim olsun. $\mathbb{A}^n$ ile k^n kümesini kastedeceğiz ve n-boyutlu afin uzay diyeceğiz. Yani, $\mathbb{A}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}$'dır ve bu kümenin elemanlarına <u>nokta</u> diyeceğiz.

$F \in k[x_1, \dots, x_n]$ ve $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ için $F(P) = 0$ ise P'ye F'nin <u>sıfırı</u> denir. $F \neq 0$ ise F'nin sıfırlarının kümesine <u>hiperyüzey</u> denir ve $V(F)$ ile gösterilir. $\operatorname{der} F = 1$ iken $V(F) \subseteq \mathbb{A}^n$'ye <u>hiperdüzlem</u> denir.

<u>Örnekler:</u> 1) $V(y - x^2) \subseteq \mathbb{R}^2$ paraboldür.

2) $V(y) \subseteq \mathbb{R}^2$, x-eksenidir.

3) $V(z^2 - x^2 - y^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ bir konidir:



<u>Tanım:</u> $X = V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n \mid \forall F \in S \text{ için } F(P) = 0\}$ olacak bir $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ varsa $X \subseteq \mathbb{A}^n$'ye <u>cebirsel küme</u> denir.

Özellikler $R=k[x_1,\dots,x_n]$ olsun.

1) $I\subseteq R$ ideali $S\subseteq R$ altkümesi tarafından üretiliyorsa yani I'nın her elemanı $G_F\in R$ olmak üzere "$\sum_{F\in S} G_F\cdot F$" şeklindeyse "$V(S)=V(I)$" dır.

Yani, cebirsel her küme bir idealin sıfır kümesidir.

İspat: ($\subseteq$:) $P\in V(S)$ olsun. Her $F\in S$ için $F(P)=0$.

Şimdi I'daki her polinonum da P'de sıfır değerini aldığını görelim:

$$\left(\sum_{F\in S} G_F\cdot F\right)(P)=\sum_{F\in S} G_F(P)\cdot \underbrace{F(P)}_{0}=\sum_{F\in S} 0=0.$$

Yani, $P\in V(I)$.

($\supseteq$:) $P\in V(I)$ olsun. Yani, P noktası I idealindeki her polinomun köküdür. $S\subseteq I$ olduğu için özel olarak S'deki polinomların da bir köküdür. Bu yüzden $P\in V(S)$'dir.

2) $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ 'dır.

Yani, ideallerin birleşiminin sıfır-kümesi herbirinin sıfır-kümelerinin kesişimidir.

İspat: $P \in V(\bigcup_\alpha I_\alpha) \iff$ Her $F \in \bigcup_\alpha I_\alpha$ için $F(P)=0$ 'dır. Özel olarak, her $F \in I_\alpha$ için $F(P)=0$ 'dır. Yani, her α için $P \in V(I_\alpha)$ 'dır.
$\Rightarrow P \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ olur. $V(\bigcup_\alpha I_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ 'dır.
Tersine, $P \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$ ise her α için ve I_α idealindeki her F için $F(P)=0$. Demek ki, P bütün I_α 'lardaki bütün polinomların ortak kökü, yani $P \in V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$ olur.

Demek ki, $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) \subseteq V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$ 'dır

ki bu ispatı bitirir.

3-) $I \subseteq J \Rightarrow V(I) \supseteq V(J)$

İspat: $I \subseteq J$ olsun ve $P \in V(J)$ olsun.

Bu durumda, her $F \in J$ için $F(P)=0$'dır.

Her $G \in I$ aynı zamanda J'nin elemanı olduğundan şu halde $G(P)=0$ olur. $P \in V(I)$.

Türkçe ifade edersek, J'deki tüm polinomların kökü olan bir nokta zaten I'dakilerin bir ortak köküdür, çünkü $I \subseteq J$.

4) • $V(FG) = V(F) \cup V(G)$, $\forall F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$.

• $V(I) \cup V(J) = V(\{FG \mid F \in I \text{ ve } G \in J\})$

• Sonlu cebirsel kümenin birleşimi cebirseldir.

İspat: İlk iddia açık, çünkü $P \in k^n$ için

$$FG(P) = F(P)G(P) = 0 \Longleftrightarrow F(P)=0 \text{ veya } G(P)=0.$$

k cisim

İkinci iddia için $P \in V(I) \cup V(J)$ alalım.

$\forall F \in I$ için $F(P)=0$ veya $\forall G \in J$ için $G(P)=0$ olur.

Dolayısıyla her $F \in I$ ve $G \in J$ için $FG(P)=0$'dır.

Yani, $P \in V(\{FG \mid F \in I, G \in J\})$'dir.

Tersine, $P \in V(\{FG / F \in I, G \in J\})$ ise her $F \in I$ ve $G \in J$ için $F(P)G(P) = FG(P) = 0$ olur.

Ya her $F \in I$ için $F(P) = 0$'dır ya da en az bir $F_0 \in I$ için $F_0(P) \neq 0$'dır. $F_0(P) \neq 0$ iken kabulden dolayı her $G \in J$ için $F_0(P)G(P) = 0$ olması $G(P) = 0$'ı gerektirir. Bu durumda $P \in V(J)$'dir.

Yani, $P \in V(I)$ veya $P \in V(J)$ olur.

Üçüncü iddia tümevarım ile ispatlanır.

5) $\mathbb{A}^n = V(0)$, $\emptyset = V(1)$, $\{(a_1, \ldots, a_n)\} = V(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ ve dolayısıyla sonlu nokta kümeleri cebirsel'dir.

İspat: $V(0) = \mathbb{A}^n$ ve $V(1) = \emptyset$ olduğu aşikar.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - a_1 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n - a_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin ortak çözümü $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$

olduğundan $V(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$'dir.

$P_1, \ldots, P_m \in K^n$ ise $\{P_1, \ldots, P_m\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{P_i\}$ (4)'den ve $\{P_i\}$'nin cebirsel olmasından dolayı cebirseldir.

Ör: $\mathbb{A}^1$'in bütün cebirsel özalt kümeleri sonlu olanlardır, çünkü (4) ve (5)'den dolayı bunlar cebirseldir. Öte yandan, sonsuz olanlar cebirsel değildir, çünkü olsalardı bir $S \subseteq k[x]$ altkümesi için $V(S)$'ye eşit olurlardı. Oysa ki

$V(S) = \bigcap_{F \in S} V(F)$ olduğundan, $F_0 \in S$ için

$$\underline{|V(S)| \leq |V(F_0)| < der(F_0)} < \infty$$

Tek değişkenli bir polinomun en fazla derecesi kadar kökü olur!

Ör: Cebirsel kümelerin <u>sayılabilir</u> birleşimi cebirsel olmayabilir: $k = \mathbb{Q}$ için $\mathbb{A}^1$'in $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ altkümesi <u>sonsuz</u> rasyonel sayının birleşimidir ve cebirsel değildir.

Ör: $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\sin x\}\subseteq\mathbb{R}^2$ cebirsel değildir.

İspat: $C=V(S)$ olacak bir $S\subseteq\mathbb{R}[x,y]$ olsaydı C ile x-ekseni sonlu noktada kesişirdi, çünkü x-ekseni $V(y)$'dir ve

$$V(F)\cap V(y)=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{F(x,0)}_{\text{Tek değişkene bağlı}}=0\}$$

olduğundan $|V(F)\cap V(y)|\leq \deg F \to$ sonlu olur,

$$|V(S)|=\left|\bigcap_{F\in S}V(F)\right|\leq|V(F)|$$ olduğundan

$$|V(S)\cap V(y)|\leq|V(F)\cap V(y)|\to \text{sonlu olurdu.}$$

Öte yandan $y=\sin x$ ile $y=0$ doğrusu $x_k=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ değerleri için $(x_k,0)$ sonsuz noktasında kesişir.

Bu çelişki ispatı bitirir.

Ör: $\{(t,t^2,t^3) \mid t\in k\}$ cebirsel bir kümedir, çünkü $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ noktası $\left.\begin{array}{l} y-x^2=0 \\ z-x^3=0 \end{array}\right\}$ sisteminin bir ortak çözümüdür. Hatta, sistemin ortak çözümleri; $y=x^2$ ve $z=x^3$ olduğundan (x,x^2,x^3) noktalarıdır. Yani,

$\{(t,t^2,t^3) \mid t\in k\} = V(y-x^2, z-x^3)$'dir.

Ör: $\{(\cos t, \sin t) \mid t\in \mathbb{R}\} = V(x^2+y^2-1)$ olduğu için cebirseldir.

Ör: $V = V(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-1) \subseteq \mathbb{R}^4$ cebirsel iken $A=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid \boxed{|z|^2+|w|^2=1}\}$ cebirsel değil, polinom değil

çünkü $A\cap V(w) = \{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid |z|=1\}$'nin sonsuz elemanı var ($\forall t\in\mathbb{R}$, $z=\cos t+i\sin t \Rightarrow |z|=1$).

NOT: $z=x_1+ix_2$ $w=x_3+ix_4$ iken

$|z|^2+|w|^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ olduğundan

$$\varphi: A \longrightarrow V, \quad (z,w) \longmapsto (x_1,x_2,x_3,x_4)$$

dönüşümü 1-1 ve örten.

1.3 Bir kümenin ideali:

$$X \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow \underbrace{I(X)}_{X'\text{in ideali}} := \{F \in k[x_1,\dots,x_n] \mid \text{her } P \in X \text{ için } F(P)=0\}.$$

Ör: $X=\{3\} \subseteq \mathbb{A}^1 \Rightarrow I(X) = \{\text{kökü 3 olan polinom}\}$

$F \in I(X) \iff F(3)=0.$

$$\begin{array}{l|l}
F(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 x + a_0 & x-3 \\ \cline{2-2}
-\ (a_n x^n - 3a_n x^{n-1}) & \underbrace{a_n \cdot x^{n-1} + (a_{n-1}-3a_n)x^{n-2} + \dots + c}_{q(x)} \\ \cline{1-1}
(a_{n-1}-3a_n)x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 & \\
\quad \vdots & \\
(n-1). \quad \text{Kalan}: cx + a_0 & \\
\qquad -\ (cx - 3c) & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

KALAN $(a_0 + 3c) = \text{sayı}$

$F(x) = q(x)(x-3) + \text{sayı}$

$F(3)=0 \iff \text{sayı} = 0$

$\iff F(x) = (x-3)q(x)$

$\Downarrow$

tek üreteçli $\leftarrow$ $\boxed{I(\{3\}) = \langle x-3 \rangle}$

Ör: Benzer şekilde $\underline{I(\{(3,5)\}) = \langle x-3, y-5 \rangle}$ 2 üreteçli ideal

$F(x,y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j$

$\Downarrow$

$F(x,y) = \sum c_{a,b}(x-3)^a (y-5)^b$ şeklindedir. F'nin sabiti $F(3,5)$'dir, görünüz.

Özellikler:

1) $X \subseteq Y \Rightarrow I(X) \supseteq I(Y)$

İspat: $f \in I(Y) \Rightarrow \forall P \in Y$ için (özel olarak her $P \in X$ için) $f(P)=0$'dır $\Rightarrow f \in I(X)$'dir.

2) $I(\emptyset) = k[x_1, \dots, x_n]$; $I(\mathbb{A}^n_k) = \langle 0 \rangle$ ∀K sonsuz

İspat: Bir f polinomunun $I(\emptyset)$'un elemanı olması için "$P \in \emptyset \Rightarrow f(P)=0$" şartını sağlaması gerekir. $\underbrace{\boxed{P \notin \emptyset} \text{ veya } f(P)=0}$ şartı daima sağlanır.

mantık kuralı: $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

İkinci kısım için, her $P \in \mathbb{A}^n_k$ için $f(P)=0$ olduğunu kabul edersek $|V(f) \cap V(x_2, \dots, x_n)| = |K| = \infty$, ($k$ - sonsuz) olur. $g(x_1) = f(x_1, 1, \dots, 1)$'in sonsuz kökü var.

Yani, $g(x_1)=0$.

$$f = \sum c_{m_1,\dots,m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \Rightarrow g = \sum c_{m_1,\dots,m_n} x_1^{m_1}$$

$g=0 \Rightarrow c_{m_1,\dots,m_n} = 0 \Rightarrow f=0$ olur.

Uyarı: Son özellik $k = \mathbb{F}_q$ sonlu cismi için doğru değil. örneğin, $f = x^q - x$ polinomu her $x \in \mathbb{A}^1_k$ için sıfır değeri alır, yani $I(\mathbb{A}^1_k)$'nın elemanıdır, ancak $f \neq 0$.

3) $X = \{(a_1, \dots, a_n)\} \Rightarrow I(X) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$.

İspat: $F(x_1, \dots, x_n) = \sum C_{m_1, \dots, m_n} (x_1 - a_1)^{m_1} \cdots (x_n - a_n)^{m_n}$,

çünkü, $x_1 = x_1 - a_1 + a_1$ dersek $x_1^b = \sum_{i=0}^{b} (-1)^i \binom{b}{i} (x_1 - a_1)^i a_1^{b-i}$

olur. $F = \sum d_{b_1, \dots, b_n} \cdot x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$'de yerine koyunca çıkar.

$F(x_1, \dots, x_n)$'nin sabit terimi $m_1 = \dots = m_n = 0$ için

$C_{0, \dots, 0}$ sayısıdır. $F(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow C_{0, \dots, 0} = 0$'dır.

$F \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ olur, çünkü

$$F = (x_1 - a_1) G_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + (x_n - a_n) G_n(x_1, \dots, x_n).$$

4) a) $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow I(V(S)) \supseteq S$

b) $X \subseteq \mathbb{A}^n_k \Rightarrow V(I(X)) \supseteq X$

İspat: Açık.

Ör: a) $S = \langle x^2 \rangle \subseteq k[x] \Rightarrow V(S) = \{0\}$ $\quad I(V(S)) = \langle x \rangle \underset{\neq}{\supseteq} S$

b) $X = k^* = k \setminus \{0\}$ (k-sonsuz, $k=\mathbb{Q}$ gibi)

$V(I(X)) = V(0) = k \supset X$ ve $k \neq X$!

5) b) $V(I(V(S))) = V(S)$ a) $I(V(I(X))) = I(X)$

Yani, V cebirsel ise $V(I(V)) = V$ olur.

J bir cebirsel kümenin ideali ise $I(V(J)) = J$.

İspat: a) 4a)'dan $I(V(I(X))) \supseteq I(X)$ old. biliyoruz.

4b)'den $V(I(X)) \supseteq X \Rightarrow I(V(I(X))) \subseteq I(X)$ olur.

b) 4a)'dan $I(V(S)) \supseteq S \Rightarrow V(I(V(S))) \subseteq V(S)$

4b)'den $V(I(V(S))) \supseteq V(S)$ olur.

Tanım: $J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ideali için

$$\sqrt{J} := \{ F \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \exists r \in \mathbb{N} : F^r \in J \}$$

$\sqrt{J} = J$ ise J'ye radikal ideal denir.

Gözlem: 1) $J \subseteq \sqrt{J}$, çünkü $F \in J \Rightarrow F^1 \in J$ yani $F \in \sqrt{J}$.

2) $X \subseteq \mathbb{A}^n$ için $I(X)$ radikal idealdir.

İspat: $F \in \sqrt{I(X)} \Rightarrow F^r \in I(X)$ olacak bir $r \in \mathbb{N}$ var.

$\Rightarrow$ Her $P \in X$ için $\underbrace{F(P)}_{\in k} \cdot \underbrace{F^{r-1}(P)}_{\in k \text{ cisim}} = F^r(P) = 0$ 'dır. $\Rightarrow F(P) = 0$

veya $F^{r-1}(P) = 0$. $\underset{\text{tümevarım}}{\Rightarrow}$ Her $P \in X$ için $F(P) = 0 \Rightarrow F \in I(X)$. $\square$

Ör: Radikal her ideal bir $X \subseteq \mathbb{A}^n$ için $I(X)$ olmak zorunda değil. Mesela, $J = \langle x^2+1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$ maksimal ideali radikaldir, çünkü maksimal idealler asaldır yani çarpımı idealde olan polinomların enaz biri idealdedir. $F^r \in J \overset{J \text{ asal}}{\Longrightarrow} F \in J$ olur.

Ancak, $J = I(X)$ olacak $X \subseteq \mathbb{R}$ olsaydı $V(J) = ?$

$\emptyset = V(J) = V(I(X)) \supset X \Rightarrow X = \emptyset$ olurdu. $I(X) = \mathbb{R}[x]$, çelişkisi elde edilir, çünkü $I(X) = J \neq \mathbb{R}[x]$'dir.

Ör: Her J ideali için $V(J) = V(\sqrt{J})$'dir.

$J \subseteq \sqrt{J} \Rightarrow V(J) \supseteq V(\sqrt{J})$ olduğunu biliyoruz.

$P \in V(J) \overset{*}{\Rightarrow}$ Her $F \in J$ için $F(P) = 0$.

P'nin her $G \in \sqrt{J}$'nin kökü olduğunu göstermeliyiz.

$$\Downarrow$$

$\exists r \in \mathbb{N}: \ G^r \in J \overset{*}{\Longrightarrow} G^r(P) = 0 \Rightarrow G(P) = 0.$

Geometri $(\mathbb{A}^n)$		Cebir $(k[x_1, \dots, x_n])$
cebirsel $\leftarrow$ X	$\longrightarrow$	$I(X)$
$V(J)$	$\longleftarrow$	J ve $\sqrt{J}$

Soru: $\{\text{cebirsel kümeler}\} \overset{\bar{k}=k}{\longleftrightarrow} \{\text{radikal idealler}\}$ 1-1 örten.

1.4 Hilbert'in Taban Teoremi:

Tanım: Bir halkanın her ideali sonlu üreteçliyse o halkaya Noetheryan denir.

Teorem (Hilbert) R Noetheryan $\Rightarrow R[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası da Noetheryan'dır.

Sonuç 1: k cisim iken $k[x_1, \dots, x_n]$ Noetheryandır.

İspat: k'nın idealleri TEK üreteçlidir.

Sonuç 2: Her cebirsel küme sonlu hiperyüzeyin kesişimidir.

İspat: $X = V(I)$ ve $I = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$ ise $X = \bigcap_{i=1}^{m} V(F_i)$. $\square$

1.5. Cebirsel Bir Kümenin İndirgenemez Bileşenleri:

Tanım: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ cebirsel kümesi verilsin. $V = V_1 \cup V_2$ olacak şekilde $V_i \subset V$ cebirsel özaltkümeleri varsa V'ye <u>indirgenebilir</u> yoksa <u>indirgenemez</u> denir.

Önerme V cebirsel kümesi indirgenemez $\Leftrightarrow I(V)$ asal.

İspat: $\Rightarrow$ $I(V)$ asal değilse $F_1F_2 \in I(V)$ ve $F_i \notin I(V)$ olacak polinomlar vardır. $V = \underset{\neq V}{[V \cap V(F_1)]} \cup \underset{\neq V}{[V \cap V(F_2)]}$ olur.

$\Leftarrow$: V indirgenebilirse $V = V_1 \cup V_2$ ve $V_i \subset V$ olacak V_i cebirsel kümeleri vardır. $F_i \in I(V_i) \setminus I(V) \neq \emptyset$ polinomları için $F_1F_2 \in I(V)$ olduğundan $I(V)$ asal değildir. $\square$

Ör: $J = \langle x^2 - y^2 \rangle = \langle (x-y)(x+y) \rangle$ asal değil, çünkü $x-y,\ x+y \notin J$ ama $x^2 - y^2 \in J$. $V(J) = V(x-y) \cup V(x+y)$. $\langle x-y \rangle$ ve $\langle x+y \rangle$ asal olduğundan indirgenemez.

<u>**Soru:**</u> Her cebirsel küme sonlu indirgenemez cebirsel kümenin birleşimi midir?

Cevap: $V = V_1 \cup V_2$, V_1 ve V_2 indirgenemezse istenen olur.

Değilse onlar da özalt kümelerinin birleşimidir. Bu süreç sonlu adımda biterse istenen elde edilir.

$V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ ile $I(V_1) \subset I(V_2) \subset \cdots$ zinciri denk olduğundan artan ideal zincirinin durağanlaştığını bulmalıyız.

Lemma: Noetheryan bir halkanın ideallerinden oluşan ve boş olmayan bir $\mathcal{K}$ koleksiyonun maksimal elemanı vardır.

İspat: $I_0 \in \mathcal{K}$ bir maksimal eleman değilse $I_0 \subset I_1$ olacak bir $I_1 \in \mathcal{K}$ vardır. Bu şekilde $I_0 \subset I_1 \subset \cdots$ zinciri elde edilir. $I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$ ve yeterince büyük bir i_m için $F_1, \dots, F_m \in I_{i_m}$ olur. Böylece, $I = I_{i_m}$ elde edilir ki I_{i_m}'nin maximal eleman olması demektir.

Teorem: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ cebirsel küme ise $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ ve $i \neq j$ için $V_i \not\subset V_j$ olacak şekilde TEK türlü belirli V_i indirgenemez cebirsel kümeleri vardır.

İspat: V_i indirgenemez cebirsel altkümeleri için

$V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ yazılabileceği yukarıdan çıkmaktadır.

Eğer $V_i \subset V_j$ olan V_i varsa onları silersek kalanlar birbirini içermez. $V_1 \cup \dots \cup V_m = V = W_1 \cup \dots \cup W_r$ ise $\forall j$ için

$$W_j = \bigcup_{i=1}^{m} (W_j \cap V_i)$$ ve W_j indirgenemez olduğundan

$W_j = W_j \cap V_{i(j)}$ olacak bir $i(j) \in \{1, \dots, m\}$ vardır.

Yani $W_j \subseteq V_{i(j)}$'dir. Benzer şekilde $V_i \subseteq W_{j(i)}$ olacağından $W_j \subseteq V_{i(j)} \subseteq W_{j(i(j))}$ elde edilir.

$W_{j_1} \subseteq W_{j_2} \Rightarrow j_1 = j_2$ olduğundan $W_j = V_{i(j)}$ olur.

Böylece $m = r$ ve sıralanış dışında TEK türlü yazılış elde edilir.

Örnek

Parabol indirgenemez, çünkü $V = \{(t, t^2) / t \in \mathbb{C}\}$ ise $I(V) = \langle y - x^2 \rangle$ asal ideal.

Tanım: $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ eşitliği Teoremdeki özellik-lere sahip ise V_i'ye V'nin <u>indirgenemez bileşenleri</u> denir.

Örnekler:

1) $V = V(\underbrace{y^4 - x^2}_{(y^2+x)(y^2-x)},\ \underbrace{y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3}_{(y^2+x)(y^2-x^2)}) = V(y^2+x) \cup V(x-1, y-1)$,

indirgenemez bileşenler

çünkü $(x,y) \in V \Leftrightarrow \boxed{y^2 + x = 0}$ veya $\boxed{x = y^2 = x^2}$.

$(x,y) = (0,0)$ veya $(x,y) = (1,1)$

2) $F(x,y) = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x,y]$ indirgenemez,

çünkü $F = (f(x) + ay)(g(x) + by) = f(x)g(x) + (ag(x) + bf(x))y + ab\,y^2$

olsaydı $ab = 1$, $g(x) = -\frac{b}{a} f(x)$ ve $f(x)g(x) = x^2(x-1)^2$ olurdu.

$-\frac{b}{a} f^2(x) = x^2(x-1)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{b}{a} f^2(x) + x^2(x-1)^2 = 0}$

çelişkisi elde edilirdi.

Öte yandan $V(F) = V(x,y) \cup V(x-1, y)$ indirgenebilir,

çünkü $y^2 = -x^2(x-1)^2$'nin $x \neq 0$ ve $x \neq 1$ iken reel

çözümü yoktur.

3) k sonsuz iken $\mathbb{A}^n$ indirgenemezdir, çünkü

$I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ asal ideal'dir.

1.6. Düzlemin Cebirsel Altkümeleri:

Son Teoremden dolayı düzlemin cebirsel her altkümesi indirgenemez cebirsel altkümelerinin sonlu birleşimidir. Bu yüzden, $\mathbb{A}^2$'nin indirgenemez cebirsel altkümelerini bulmak yeter.

Önerme: $F, G \in k[x,y]$ olsun. Eğer F ve G'nin ortak çarpanı yoksa $V(F,G) = V(F) \cap V(G)$ sonludur.

İspat: Hipotezden dolayı F ve G'nin $k[x][y]$'de ortak çarpanı yoktur. Bu durum $k(x)[y]$'de de geçerlidir. $k(x)[y]$, TİB olduğundan $\langle F, G \rangle$ ideali tek üreteçlidir: $\langle F, G \rangle = \langle \text{OBEB}(F,G) \rangle = \langle 1 \rangle$. Yani, $\exists\, R, S \in k(x)[y]$: $RF + SG = 1$'dir. Uygun bir $D \in k[x] \setminus \{0\}$ için $A := DR \in k[x,y]$ ve $B := DS \in k[x,y]$ olur ki $AF + BG = D$ sağlanır.

$(a,b) \in V(F,G) \Rightarrow D(a) = 0$ ve D tek değişkenli olduğundan sonlu $a \in k$ için $(a,b) \in V(F,G)$'dir. Benzer şekilde sonlu $b \in k$ için $(a,b) \in V(F,G)$ olduğu görülür.

Sonuç 1: $F \in k[x,y]$ indirgenemez ve $V(F)$ sonsuz ise $I(V(F)) = \langle F \rangle$ ve $V(F)$ indirgenemezdir.

İspat: $G \in I(V(F))$ ise $V(F,G) = V(F) \cap V(G) = V(F)$ kümesi sonsuz olduğundan F ve G'nin ortak çarpanı vardır. F indirgenemez olduğundan bu çarpan F'dir yani $G \in \langle F \rangle$ olur ki $I(V(F)) \subseteq \langle F \rangle$ demektir. $F \in I(V(F))$ olduğundan eşitlik elde edilir.
F indirgenemez $\Rightarrow \langle F \rangle$ asal olduğundan $V(F)$ indirgenemez.

Sonuç 2: k sonsuzken $\mathbb{A}^2$'nin indirgenemez cebirsel altkümeleri; $\mathbb{A}^2$, $\emptyset$, tek nokta kümeleri ve indirgenemez $F(x,y)$ polinomlarının tanımladığı sonsuz elemanlı $V(F)$ eğrileridir.

İspat: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{A}^2$ indirgenemez cebirsel altkümesi için V sonlu veya $I(V) = \langle 0 \rangle$ ise V tek nokta kümesi veya $\mathbb{A}^2$'dir. Diğer durumda $I(V)$ sabit olmayan bir F elemanı içerir. $F = G \cdot H \in I(V) \xRightarrow{I(V) \text{ asal}} G \in I(V)$ veya $H \in I(V)$ olur. Yani $I(V)$ indirgenemez ve sabit olmayan bir F

polinomu içerir. İddiamız $I(V)=\langle F\rangle$ olduğudur.

$I(V)\subseteq\langle F\rangle$ olduğunu görmek yeter: $G\in I(V)\Rightarrow$

$V\subset V(F,G)$ ve V sonsuz olduğundan $V(F,G)$ sonsuz

yani F ve G'nin ortak çarpanı vardır. F indirgenemez

olduğundan $F|G$ yani $G\in\langle F\rangle$'dir. $\square$

Sonuç 3: $\bar{k}=k$, $F\in k[x,y]$ sabit değil ve $F=F_1^{n_1}\cdots F_r^{n_r}$

F'nin indirgenemez çarpanlarına ayrılışı ise

$V(F)=V(F_1)\cup\ldots\cup V(F_r)$, $V(F)$'nin indirgenemez

bileşenlerine ayrılışı olur ve $I(V(F))=\langle F_1\cdots F_r\rangle$'dir.

İspat: F_i'lerin hiçbiri diğerini bölmediği için

$V(F_i)$'ler birbirini içermez. $V(F)=V(F_1)\cup\ldots\cup V(F_r)$

eşitliği açık olduğundan ilk kısım elde edilir.

$$I(V(F))=I\left(\bigcup_{i=1}^{r}V(F_i)\right)=\bigcap_{i=1}^{r}I(V(F_i))\underset{\text{Sonuç 1}}{=}\bigcap_{i=1}^{r}\langle F_i\rangle$$

$\bar{k}=k \overset{\text{ÖDEV}}{\Longrightarrow} V(F_i)$ sonsuz

Her $i=1,\ldots,r$ için $F_i|G\Rightarrow F_1\cdots F_r|G$ olduğundan

$\bigcap_{i=1}^{r}\langle F_i\rangle=\langle F_1\cdots F_r\rangle$ yani $I(V(F))=\langle F_1\cdots F_r\rangle$

olur ki istenen budur. $\square$

Uyarı: Sonuç 3, k sonsuz ve her i için $V(F_i)$ sonsuzken de geçerlidir. Ancak bu ikisi her zaman sağlanmayabilir. Örneğin, $k = \mathbb{R}$ iken $F = (x^2+y^2+1)^2(x^2+y^2-1)^3$ için $V(F) = V(x^2+y^2-1)$ ve $I(V(F)) = \langle x^2+y^2-1 \rangle$.

Buradaki sorun: $F_1 = x^2+y^2+1$ indirgemez olduğu halde $V(F_1) = \emptyset$ sonsuz değil!

Öte yandan, $k = \mathbb{R}$ iken $F = (x-y)^2(x+y)^3$ için $V(F) = V(x-y) \cup V(x+y)$ ve $I(V(F)) = \langle (x-y)\cdot(x+y) \rangle$!

1.7 Hilbert'in Sıfır Yeri Teoremi

$\bar{k}=k$ ve $J \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ ise $I(V(J))=\sqrt{J}$.

Ör: $k=\mathbb{R}$ $J=\langle x(x^2+1)\rangle$ radikal ideali için $V(J)=\{0\}$ ve $I(V(J))=\langle x\rangle \neq J=\sqrt{J}$!

Sonuç 1 Radikal ideallerle cebirsel kümeler arasında 1-1 eşleme vardır.

İspat: J radikal $\Rightarrow I(V(J))=\sqrt{J}=J$.

Sonuç 2: J asal ise $V(J)$ indirgenemezdir. Asal ideallerle indirgenemez cebirsel kümeler; maksimal ideallerle noktalar 1-1 eşlenir.

İspat: J asal $\Rightarrow I(V(J))=J$ asal $\Rightarrow V(J)$ indirgenemez.

Sonuç 3: $F\in k[x_1,\dots,x_n]\setminus k$ ve $F=F_1^{n_1}\cdots F_r^{n_r}$ indirgenemez ayrışımı olsun. $V(F)=V(F_1)\cup\cdots V(F_r)$ de bir indirgenemez ayrışımdır ve $I(V(F))=\langle F_1\cdots F_r\rangle$ olur. İndirgenemez polinomlar (ve sıfırdan farklı katları) ile indirgenemez hiperyüzeyler 1-1 eşlenir.

Sonuç 4: $J \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ ideali için $V(J)$ sonludur $\Leftrightarrow$ $k[x_1,\dots,x_n]/J$ halkası k üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayıdır. Bu durumda, $|V(J)| \leq boy_k\left(\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{J}\right)$.

Kanıt: $\Leftarrow$: $P_1,\dots,P_r \in V(J)$ ise $i \neq j$ iken $F_i(P_j)=0$ ve $F_i(P_i)=1$ olacak $F_1,\dots,F_r$ polinomları vardır, çünkü $W=\{P_1,\dots,P_r\}$ dersek $I(W) \subsetneq I(W\setminus\{P_i\})$'dir. $G_i \in I(W\setminus\{P_i\})$ ama $G_i \notin I(W)$ seçersek $G_i(P_j)=0 \Leftrightarrow i\neq j$ olur.

$F_i = \frac{G_i}{G_i(P_i)}$ istenen özelliklere sahiptir.

$\overline{F_i} := F_i + J \in k[x_1,\dots,x_n]/J$ olsun.

Eğer $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{F_i} = \overline{0} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i}_{} \in J$

$\lambda_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i\right)(P_j) = 0$, çünkü $P_j \in V(J)$, $j=1,\dots,n$.

Yani, $\overline{F_1},\dots,\overline{F_r}$ lineer bağımsız ve dolayısıyla $r \leq boy_k\left(k[x_1,\dots,x_n]/J\right)$ olur.

$\Rightarrow$: $V(J) = \{P_1, \dots, P_r\}$ sonlu olsun.

$G_j = \prod_{i=1}^{r} (x_j - P_{ij})$, $j = 1, \dots, n$, dersek $G_j(P_i) = 0$,

$\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ olduğu açık. Yani, $G_j \in I(V(J))$.

$I(V(J)) = \sqrt{J}$ olduğundan $\exists N >> 0 : G_j^N \in J$,

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Dolayısıyla, $\overline{G_j}^N = \overline{0}$ olur.

Bu yüzden $\overline{x_j}^{rN}$'yi $1, \overline{x_j}, \dots, \overline{x_j}^{rN-1}$ elemanlarının lineer bileşimi olarak yazabiliriz. Tümevarımla, bunun her s ve $\overline{x_j}^s$ için geçerli olduğu gösterilir.

Dolayısıyla, $\{\overline{x_1}^{m_1}, \dots, \overline{x_n}^{m_n} \mid m_i < rN\}$ bölüm halkasını vektör uzayı olarak üretir. Boyut sonlu olur. $\square$

Örnek: $J = \langle y^2 - x^2, y^2 + x^2 \rangle \Rightarrow V(J) = ?$ $\text{boy}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[x,y]/J\right) = ?$

$J = \langle x^2, y^2 \rangle$, çünkü örneğin, $y^2 = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \frac{1}{2}(y^2 + x^2)$

$V(J) = \{(0,0)\}$ olur.

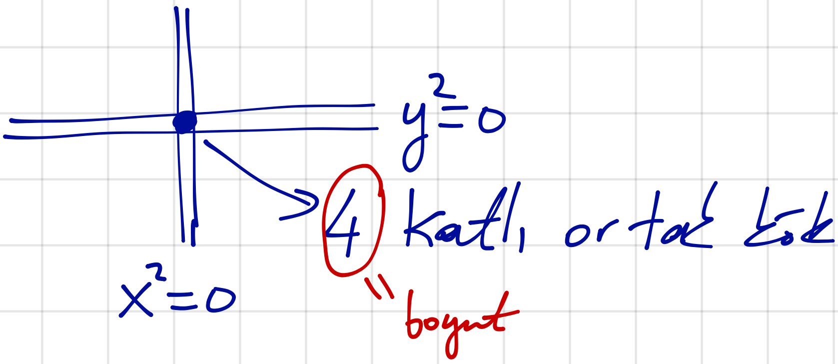
$\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2, y^2 \rangle$ vektör uzayının bir tabanı $\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}\}$

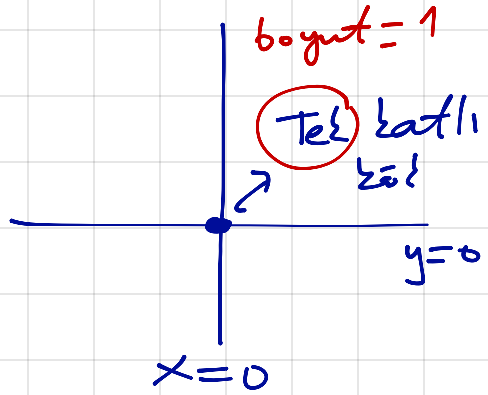
olduğundan boyutu 4'tür.

Öte yandan, $I(V(J)) = \sqrt{J} = \langle x, y \rangle$

ve $\mathbb{C}[x,y]/\langle x,y \rangle$'nin bir bazı $\{\overline{1}\}$ olduğundan

$\text{boy}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[x,y]/\langle x,y \rangle\right) = \underline{1} = |V(J)|$ 'dir.





KABUL: Bundan sonra k cebirsel kapalı!

2. Afin Çeşitlemler:

Tanım: İndirgenemez afin cebirsel kümelere afin çeşitlem denir.

2.1 Koordinat Halkaları:

$V \subseteq \mathbb{A}^n$ boş olmayan bir (afin) çeşitlem olsun. $I(V)$ asal, $k[V] := k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ tamlık bölgesi olur. $k[V]$'ye V'nin koordinat halkası denir.

Daha genel olarak herhangi bir $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ için $\mathcal{F}(Y,k) := \{Y \to k \text{ fonksiyon}\}$ kümesi bir halkadır: ($(f+g)(P) := f(P)+g(P)$ ve $(fg)(x) := f(x)g(x)$ işlemleriyle)

Özel olarak, $Y = V$ gibi bir çeşitlem iken yukarıda tanımlanan iki halka arasında güzel bir ilişki vardır: $f \in \mathcal{F}(V,k)$ fonksiyonu ile $F \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomu V üzerinde aynı değerleri alıyorsa, yani, her $P \in V$ için $f(P) = F(P)$ ise f'ye bir polinom fonksiyon denir.

Örneğin sabit fonksiyonlar, polinom fonksiyondur.

Ödev: Polinom fonksiyonlar $\mathcal{F}(V,k)$'nın bir alt halkasını oluşturur, gösteriniz.

$F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$ için $F(P) = G(P), \forall P \in V$ ise $(F-G)(P) = 0, \forall P \in V$ olacağından $F - G \in I(V)$ olur.

Yani $F + I(V) = G + I(V)$ veya $\overline{F} = \overline{G} \in k[V]$ olur.

Demek ki, $\mathcal{F}(V,k)$'nın polinom fonksiyonlar alt halkası $k[V]$'ye izomorftur.

Ör: $V = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{C}\}$ parabolünü alalım.

$F(x,y) = 3x^2$ $G(x,y) = 3y$ polinomlarına karşılık gelen fonksiyonlar $f : V \to k$ ve $g : V \to k$ ise

$f(t, t^2) = 3t^2 = g(t, t^2)$, $\forall t \in \mathbb{C}$, olur.

Zaten $F - G = 3(y - x^2) \in I(V) = \langle y - x^2 \rangle$.

Uyarı: k cebirsel kapalı iken $I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ olduğundan $k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$ olur ve iki polinomun fonksiyon olarak aynı olmasıyla polinom olarak aynı olması denktir.

k sonlu iken durum değişir.

Bunun sebebi artık $I(\mathbb{A}^n) \neq \langle 0 \rangle$ olur.

Örneğin, $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ve $n = 1$ için

$x^3 - x \in I(\mathbb{A}^1)$'dir. Bu yüzden,

$F(x) = x$ ve $G(x) = x^3$ polinomları $k[x]/I(\mathbb{A}^1)$

bölüm halkasının aynı elemanını verir: $\overline{F} = \overline{G}$.

$f(x) = x$ ve $g(x) = x^3$ polinom fonksiyonları

aynı değerleri aldığı için $f = g$'dir.

Buradaki fark k'nın cebirsel kapalı olduğu durumdaki gibi $F = G$ değildir.

İDDİA: $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ iken $I(\mathbb{A}^1) = \langle x^3 - x \rangle$'dir.

İSPAT: $F \in I(\mathbb{A}^1)$ ise F'nin 3 kökü var.

$F = G \cdot (x^3 - x) + r$ ise $\operatorname{der}(r) \leq 2$'dir.

r tek değişkenli olduğundan, $r \neq 0$ iken en fazla 2 kökü olabilir. Oysa $r(x_0) = F(x_0) = 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{A}^1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ olduğundan, r'nin 3 kökü vardır. $\Rightarrow r = 0$!

Kabul: Sabit polinomların $k[V]$'deki denklik sınıfları k'nın elemanlarına karşılık geldiğinden bu iki cisim bundan sonra aynı kabul edilip, $k \subseteq k[V]$ yazılacaktır. $\left(c \in k \leftrightarrow c + I(V) \in k[V]\right)$

2.2. Polinom Dönüşümler:

$V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ çeşitlemleri ve $\varphi : V \to W$ dönüşümü verilsin. Eğer $\varphi(P) = (T_1(P), \ldots, T_m(P))$ olacak $T_1, \ldots, T_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomları varsa φ'ye bir polinom dönüşüm denir.

Örneğin, $T : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $T(P) = (T_1(P), \ldots, T_m(P))$, polinom dönüşümü için $T(V) \subseteq W$ ise $T|_V : V \to W$ bir polinom dönüşümdür.

$n=1$ $m=2$ için $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $T(x) = (\underset{T_1}{x+1}, \underset{T_2}{x^2})$ bir polinom dönüşüm iken $V = \{0\}$ $W = V(x_1) \subseteq \mathbb{C}^2$ alırsak $T|_V : V \to W$ bir fonksiyon değildir, çünkü $T|_V(0) = (1,0) \notin W$. Yani, $T|_V(V) \not\subseteq W$!

Her $\varphi: V \to W$ dönüşümü $\tilde{\varphi}: \mathcal{F}(W,k) \to \mathcal{F}(V,k)$; $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$, şeklinde tanımlanan bir halka homomorfizmi verir. φ polinom dönüşüm ise $\tilde{\varphi}(k[W]) \subseteq k[V]$ olur. Yani, $\tilde{\varphi}$'nın $k[W]$'ye kısıtlanışı bir homomorfizm olur, çünkü her $f = F + I(W) \in k[W]$ için $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi = F(T_1, \dots, T_m) + I(V) \in k[V]$'dir.

Ayrıca, $\varphi(V) \subseteq W$ olduğundan, $F \in I(W)$ ise $F(T_1, \dots, T_m) \in I(V)$'dir, çünkü $F(\underbrace{T_1(P), \dots, T_m(P)}_{\in \varphi(V) \subseteq W}) = 0, \forall P \in V$.

Eğer $V = \mathbb{A}^n$, $W = \mathbb{A}^m$ ve $T_1, \dots, T_m \in k[x_1, \dots, x_n]$'nin tanımladığı polinom dönüşümü $T: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ ise T_i'ler T tarafından tek türlü belirlenir, çünkü her $P \in \mathbb{A}^n$ için, $T(P) = (T_1(P), \dots, T_m(P))$ ve $T(P) = (T_1'(P), \dots, T_m'(P))$ olsa her i için $(T_i - T_i')(P) = 0$ yani $T_i - T_i' \in I(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ olur. Bu durumda $T = (T_1, \dots, T_m)$ yazarız.

Önerme: V, W afin çeşitlem olmak üzere $\varphi: V \to W$ polinom dönüşümleriyle $\tilde{\varphi}: k[W] \to k[V]$ homomorfizmaları arasında 1-1 eşleme vardır. Ayrıca bu tip her φ, bir $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ polinom dönüşümünün kısıtlanışıdır.

Kanıt: $\alpha : k[W] \to k[V]$ bir homomorfizm olsun. Her $i=1,\dots,m$ için $T_i + I(V) = \alpha(x_i + I(W))$ ise $T=(T_1,\dots,T_m) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ bir polinom dönüşümdür ve $\widetilde{T} : k[\mathbb{A}^m] = k[x_1,\dots,x_m] \to k[\mathbb{A}^n] = k[y_1,\dots,y_n]$'i verir.

$\widetilde{T}(x_i) = T_i$ olduğundan $\widetilde{T}|_{k[W]} = \alpha$'dır.

$\alpha(0+I(W)) = 0+I(V)$ olduğundan $\widetilde{T}(I(W)) \subseteq I(V)$ ve dolayısıyla $\underline{T(V) \subseteq W}$ olur, çünkü her $F \in I(W)$ ve $P \in V$ için $F(T(P)) = \underbrace{\widetilde{T}(F)}_{\in I(V)}(P) = 0$ ve $T(P) \in V(I(W)) = W$'dir.

Böylece, T'nin V'ye kısıtlanışı bir $\varphi : V \to W$ polinom dönüşümü olur. $\varphi(P) = (T_1(P),\dots,T_m(P))$ olduğu için $\widetilde{\varphi}(x_i + I(W)) = T_i + I(V)$, $i=1,\dots,m$ olur ki $\widetilde{\varphi} = \alpha$ demektir. Böylece α ile φ 1-1 eşlenir. $\square$

Örnek: $V = \mathbb{A}^1$, $W = \{(t^2, t^3) \mid t \in k\} = V(x^3 - y^2)$.

$\varphi : V \to W$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ bir polinom dönüşümü,

$$\widetilde{\varphi} : k[W] = k[x,y]/\langle x^3 - y^2 \rangle \longrightarrow k[\mathbb{A}^1] = k[t]$$

$$\bar{x} \longrightarrow t^2$$

$$\bar{y} \longrightarrow t^3$$

Yani, $f(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y) + \langle x^3 - y^2 \rangle \in k[W]$ ise

$\tilde{\varphi}(f)(t) = f(t^2, t^3) \in k[V] = k[\mathbb{A}^1]$ olur.

$$\varphi : V \longrightarrow W \quad \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \quad k[W] \longrightarrow k[V]$$

$$t \longrightarrow (t^2, t^3) \qquad\qquad f \longrightarrow \tilde{\varphi}(f)$$

$$\begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & (t^2,t^3) \\ & {\scriptstyle \tilde{\varphi}(f)} \searrow & \downarrow f \\ & & f(t^2,t^3) \end{array}$$

Tersine, $\alpha : k[W] \to k[V]$ bir halka homomorfizmi

$$\bar{x} \to t^a$$
$$\bar{y} \to t^b$$

ise $\alpha(\bar{0}) = 0$ olmalı. Yani $\alpha(\bar{x}^3 - \bar{y}^2) = t^{3a} - t^{2b} = 0$, $\forall t \in k$, olmalı. Bu ise ancak ve ancak $3a = 2b$ iken mümkündür. $T : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$, $T(t) = (t^a, t^b)$, için $T(V) \subseteq W$, çünkü $(x^3 - y^2)(t^a, t^b) = t^{3a} - t^{2b} = 0$.

$(a,b) = (2,3)$ iken $\varphi = T|_V = T$ (çünkü $V = \mathbb{A}^1$) ve $\tilde{\varphi} = \alpha$.

$3a = 2b$ olan her $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ ikilisi $\varphi_{a,b}(t) = (t^a, t^b)$ polinom dönüşümünü tanımlar ki $\tilde{\varphi}_{a,b} = \alpha_{a,b}$.

Ör: $W = \mathbb{A}^1$ ve $V = V(y - x^2)$ olsun.

$\alpha_1 : k[W] = k[t] \to k[V]$, $t \to \bar{x}$ olsun.

$T_1 : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, $T_1(x,y) = x$ için, $\varphi_1 = T_1|_V$ dersek $\widetilde{\varphi_1}(t) = \bar{x}$ yani $\widetilde{\varphi_1} = \alpha_1$ olur.

$\alpha_2 : k[t] \to k[V]$, $\alpha_2(t) = \bar{y}$ iken $T_2(x,y) = y$ olacağından $\varphi_2 = T_2|_V$ için $\widetilde{\varphi_2} = \alpha_2$ olur.

$\alpha_3 : k[t] \to k[V]$, $\alpha_3(t) = \bar{x}^2 \ni T_3(x,y) = x^2$ ve $\varphi_3 = T_3|_V$ olur. Dolayısıyla, $\widetilde{\varphi_3} = \alpha_3$ olur.

UYARI: $\bar{x}^2 = \bar{y} \in k[V]$ olduğundan $\alpha_2 = \alpha_3$, ve dolayısıyla $\varphi_2 = \varphi_3$ olur, çünkü $(x,y) \in V$ ise $(x,y) = (t,t^2)$ şeklinde ve $\varphi_2(t,t^2) = t^2 = \varphi_3(t,t^2)$.

Ancak, $(x,y) \in \mathbb{A}^2 \setminus V$ iken $y \neq x^2$ olacağı için $T_2(x,y) = y \neq x^2 = T_3(x,y)$.

Ör: $\varphi : \overbrace{V(x^3-y^2)}^{V} \hookrightarrow \mathbb{A}^3$ ise

$$(x,y) \longrightarrow (x,y,z_0)$$

$$\tilde{\varphi} : k[x,y,z] \longrightarrow k[x,y]/\langle x^3-y^2\rangle$$

$$x \to \bar{x}, \quad y \to \bar{y}, \quad z \to \bar{z}_0$$

$F(x,y,z) = x^3 - y^2 z$ için

$\tilde{\varphi}(F) = \bar{x}^3 - \bar{z}_0 \bar{y}^2$ olur.

$z_0 = 1$ iken $\tilde{\varphi}(F) = \bar{0}$, $z_0 \neq 1$ iken $\tilde{\varphi}(F) \neq \bar{0}$!

$\operatorname{Ker}\tilde{\varphi} = \{ F \in k[x,y,z] \mid F \in \langle x^3-y^2, z-z_0\rangle \} = I(W)$,

burada $W = V(x^3-y^2, z-z_0) = \varphi(V)$ ve $k[W] = k[x,y,z]/I(W)$

için $k[V] \cong k[W]$ ile $V \cong W$ olduğu görülür.

Aslında $\varphi^{-1}(x,y,z_0) = (x,y)$ polinom dönüşümü

için $\varphi \circ \varphi^{-1}(x,y,z_0) = (x,y,z_0)$ ve $\varphi^{-1} \circ \varphi(x,y) = (x,y)$'dir.

W, $\mathbb{A}^3$'te $x^3 = y^2$ yüzeyi ile $z = z_0$'ın kesişimi;

V, $\mathbb{A}^2$'de $x^3 = y^2$ eğrisi!

$$\boxed{\begin{array}{c} (x,y,z_0) \in W \\ \varphi^{-1}\downarrow \uparrow \varphi \\ (x,y) \in V \end{array}}$$

Tanım: Bir $\varphi: V \to W$ polinom dönüşümünün $\psi \circ \varphi = 1_V$ ve $\varphi \circ \psi = 1_W$ olacak $\psi: W \to V$ ters polinom dönüşümü varsa φ'ye (dolayısıyla ψ'ye) bir izomorfizm denir.

Önerme'ye göre iki afin çeşitlemin izomorf olması koordinat halkalarının izomorf olmasına denktir.

Örnek: $V = \mathbb{A}^1$ ile $W = V(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$ izomorf değildir.

$\varphi: V \to W$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ 1-1, çünkü t^3 öyle.

φ örten çünkü $x^3 = y^2 \geq 0$ iken $y = t^3$ olacak bir tek t vardır ki $x^3 = t^6$ olduğundan $x = t^2$ olur.

$$\psi: W \to V, \quad \psi(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x}, & \text{eğer } x \neq 0 \\ 0, & \text{eğer } x = 0 \end{cases}$$

için $\psi \circ \varphi(t) = t$, $\varphi \circ \psi(x,y) = \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}\right) = (x,y)$ $(x \neq 0)$

$y^2 = x^3$

Ancak ψ polinom dönüşüm değil. Öte yandan;

$\tilde{\varphi}: k[W] \to k[V] = k[t]$, $\tilde{\varphi}(\bar{x}) = t^2$, $\tilde{\varphi}(\bar{y}) = t^3$

olduğundan, $\tilde{\varphi}(k[W]) = k[t^2, t^3] \neq k[t]$ yani $\tilde{\varphi}$ örten değil. $\tilde{\varphi}$ izomorfizm olamaz $\Rightarrow \varphi$ de olamaz.

Örnek: $J = \langle x^2 - y^3, y^2 - z^3 \rangle \subset k[x,y,z]$ olsun.

$\alpha : k[x,y,z] \to k[t]$, $x \to t^9$, $y \to t^6$, $z \to t^4$ olsun.

$k[x,y,z]/J$ halkasında $\bar{x}^2 = x^2 + J = y^3 + J = \bar{y}^3$,

$\bar{y}^2 = \bar{z}^3$ olduğundan $\bar{x}^2 = \bar{y} \cdot \bar{y}^2 = \bar{y}\bar{z}^3$ olur.

Dolayısıyla $\bar{F}(x,y,z) \in k[x,y,z]/J$ ise $A, B, C, D \in k[z]$

için $\bar{F}(x,y,z) = \bar{A} + \bar{B}\,\bar{x} + \bar{C}\,\bar{y} + \bar{D}\,\bar{x}\bar{y}$ olur.

$\alpha(F) = 0 \Rightarrow A(t^4) + B(t^4)t^9 + C(t^4)t^6 + D(t^4)t^{15} = 0$.

$D \neq 0 \Rightarrow 4d + 15 = 4c + 6 = 4b + 9 = 4a$ olacak

$a, b, c, d \in \mathbb{N}$ vardır ki sadeleşme gerçekleşsin. 6, 9

ve 15'in farkları 4'e bölünmediğinden bu mümkün

değil. $D = 0$. Benzer şekilde $C = 0$, $B = 0$ ve $A = 0$.

Dolayısıyla $F = 0$ olur. Bu ise $\ker \alpha = J$ demektir,

çünkü $\alpha(x^2 - y^3) = t^{18} - t^{18} = 0$, $\alpha(y^2 - z^3) = t^{12} - t^{12} = 0$ ve

dolayısıyla $J \subseteq \ker \alpha$ olur. Tersine, $F \in \ker \alpha$ ise

$\alpha(F) = \alpha(A + Bx + Cy + Dxy) = 0 \Rightarrow A = B = C = D = 0 \Rightarrow F \in J$.

$W = V(J)$, $\bar{\alpha} : k[W] \to k[t]$, $\bar{x} \to t^9$, $\bar{y} \to t^6$, $\bar{z} \to t^{15}$

ise $\varphi : \mathbb{A}^1 \to W$, $\varphi(t) = (t^9, t^6, t^{15})$ iken $\tilde{\varphi} = \bar{\alpha}$!

2.3. Koordinat Dönüşümleri:

$T: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ polinom dönüşüm, $F \in k[X_1,\dots,X_m]$ ise $F^T := \tilde{T}(F) = F(T_1,\dots,T_m)$. Benzer şekilde J ideali için $J^T := \langle F^T \mid F \in J \rangle$ ve $W \subseteq \mathbb{A}^m$ cebirsel kümesi için $W^T := T^{-1}(W) = \{ P \in \mathbb{A}^n \mid T(P) \in W \}$ olsun.

Gözlem: $J = I(W) \Rightarrow W^T = V(J^T)$.

Kanıt: $P \in W^T \Leftrightarrow T(P) \in W \underset{W=V(I(W))}{\Longleftrightarrow} F(T(P)) = 0, \forall F \in J$

$\Longleftrightarrow F^T(P) = 0, \forall F \in J \Leftrightarrow P \in V(\{F^T \mid F \in J\}) = V(J^T)$ $\square$

Özel olarak, $W = V(F)$ hiperyüzey ve F^T sabit değilse $W^T = V(F^T)$'dir, çünkü

$P \in W^T \Leftrightarrow T(P) \in W \Leftrightarrow F(T(P)) = 0 \Leftrightarrow F^T(P) = 0 \Leftrightarrow P \in V(F^T)$.

Tanım: Eğer $T: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ polinom dönüşümü 1-1, örten ve $T_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + a_{i0}$ $(\deg T_i = 1)$ ise T'ye $\mathbb{A}^n$ üzerinde bir **afin koordinat dönüşümü** denir.

• Dikkat edilirse $T_i'(x_1,\dots,x_n)=\sum a_{ij}x_j$ lineer dönüşümü ve $T_i''(x_1,\dots,x_n)=(x_1+a_{10},\dots,x_n+a_{n0})$ ötelemesi için $T_i=T_i''\circ T_i'$ olduğu görülür.

• Ötelemeler tersinir olduğundan T'nin tersinir olması T' lineer dönüşümünün tersinir olmasına o da $[a_{ij}]$ matrisinin determinantının 0'dan farklı olmasına denktir.

• T_1 ve T_2, $\mathbb{A}^n$ üzerinde bir koordinat dönüşümü ise $T_1\circ T_2$ ve T_1^{-1} de birer koordinat dönüşümüdür. Yani, her T koordinat dönüşümü bir cebirsel çeşitlemenin izomorfizmasıdır.

2.4. Rasyonel Fonksiyonlar ve Yerel Halkalar:

$\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{A}^n$ çeşitlem, $k[V]$ koordinat halkası olsun. V indirgenemez olduğundan $k[V]$ bir tamlık bölgesidir. Bu yüzden bölüm cismini oluşturabiliriz. Bu cismi $k(V)$ ile gösterip rasyonel fonksiyonlar cismi adını vereceğiz.

$\underset{\neq \bar{0}}{a}, \underset{\neq \bar{0}}{b}, c, d \in k[V]$ için $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - bc = \bar{0}$ ($k[V]$'de).

$\frac{a}{b} := \overline{(a,b)}$ kümesi $\sim$ denklik bağıntısına göre bir denklik sınıfıdır ve $k(V) = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in k[V] \text{ ve } \underbrace{b \neq \bar{0}}_{\exists P \in V \text{ için } b(P) \neq 0.} \right\}$

$f \in k(V)$ ve $P \in V$ için $f = \frac{a}{b}$ ve $b(P) \neq 0$ olacak $a, b \in k[V]$ varsa f'ye P'de <u>düzenli</u> denir.

Dikkat edilirse f'yi $\frac{a}{b}$ şeklinde yazmanın birçok yolu var olduğundan f'nin P'de düzenli olması için bunlardan birinde paydanın sıfır değeri almaması yeterlidir.

<u>Ör:</u> $V = V(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}^4$. $k[V] = k[x,y,z,w] / \langle xw - yz \rangle$.

$f = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \in k(V)$, çünkü $\bar{x}\bar{w} - \bar{y}\bar{z} = \bar{0}$ $\left(\Leftrightarrow xw - yz \in I(V) \right)$.

Eğer $P = (x,y,z,w) \in V$ için $y \neq 0$ veya $w \neq 0$ ise f, P'de düzenlidir (yani tanımlıdır). Öte yandan $y = 0$ ve $w = 0$ iken $f = \frac{a}{b}$ ise $b(P) = 0$ olduğunu görebiliriz.

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = f = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Rightarrow Ay - Bx,\ Aw - Bz \in I(V) \text{'dir.}$$

$I(V) = \langle xw - yz \rangle$ olduğundan $\exists F, G \in k[x,y,z,w]$: (*) $\boxed{\begin{array}{l} Ay - Bx = F(xw - yz) \\ Aw - Bz = G(xw - yz) \end{array}}$

$$\begin{aligned} -w/ \quad & Ay - Bx = F(xw-yz) \\ y/ \quad & Aw - Bz = G(xw-yz) \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow B(xw-yz) = (yG-wF)(xw-yz)$$

$$\Rightarrow B = yG - wF \in \langle y, w \rangle.$$

Sonuç olarak, $\bar{B}(P) = B(x,0,z,0) = 0G(P) - 0F(P) = 0$ olur.

Tanım: $P \in V$ ise $\mathcal{O}_P(V) := \{ f \in k(V) \mid f,\ P\text{'de düzenli} \}$ olarak tanımlanır. NOT: $k \subset k[V] \subset \mathcal{O}_P(V) \subset k(V)$!

Ödev: $\mathcal{O}_P(V)$'nin $k(V)$'nin bir althalkası olduğunu gösteriniz.

Tanım: $P \in V$, $f \in k(V)$ olsun. f, P'de tanımlı değilse P'ye f'nin bir kutup noktası, bu noktaların kümesine de f'nin kutup kümesi denir.

Önerme 2: 1) f'nin kutup kümesi V'nin bir cebirsel altkümesidir.

2) $k[V] = \bigcap\limits_{P \in V} \mathcal{O}_P(V)$.

İspat: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ olsun. $f \in k(V)$ için $J_f := \{ G \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \bar{G} f \in k[V] \}$ olsun. J_f'nin elemanları $f = \frac{\bar{F}}{\bar{G}} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \dots$ temsillerinde paydayı veren polinomlardır, çünkü $G \in J_f$ ise $k(V)$ içinde $\bar{G} \cdot f = \bar{F}$ olacak $\bar{F} \in k[V]$ vardır. Bu durumda, $f = \frac{\bar{F}}{\bar{G}}$ olur. Tersine $f = \frac{\bar{F}}{\bar{G}}$ iken $\bar{G} \cdot f = \bar{F} \in k[V]$ olduğundan $\bar{G} \in J_f$.

- J_f, $k[x_1, \dots, x_n]$'nin bir idealdir, çünkü $G \in J_f$ ve $H \in k[x_1, \dots, x_n]$ ise $\bar{G} \cdot f = \bar{F}$ olacak bir $\bar{F} \in k[V]$ var olduğundan $\overline{HG} \cdot f = \bar{H}(\bar{G} \cdot f) = \bar{H}\bar{F} \in k[V]$ olur ki $HG \in J_f$ anlamına gelir.
- $J_f \supseteq I(V)$, çünkü her $G \in I(V)$ için $\bar{G} = \bar{0}$ ve dolayısıyla $\bar{G} f = \bar{0} \in k[V]$'dir.
- $V(J_f) \subseteq V$ cebirsel altkümesi f'nin kutup kümesidir.

$f\in \mathcal{O}_p(V) \iff f$, P'de tanımlı $\iff P\notin V(J_f)$, olduğundan

$f\in \bigcap\limits_{p\in V}\mathcal{O}_p(V) \Rightarrow V(J_f)=\emptyset \underset{\text{Nullstellensatz}}{\Rightarrow} \sqrt{J_f}=k[x_1,\dots,x_n]$.

$1\in\sqrt{J_f} \Rightarrow 1\in J_f \Rightarrow f = 1\cdot f\in k[V]. \Rightarrow \bigcap\limits_{p\in V}\mathcal{O}_p(V)\subseteq k[V]$.

$\forall p\in V, k[V]\subseteq \mathcal{O}_p(V) \Rightarrow k[V]\subseteq \bigcap\limits_{p\in V}\mathcal{O}_p(V)$ olur. □

Lemma: Bir R halkası için aşağıdaki şartlar denktir:

1) R'nin tersi olmayan elemanları bir ideal oluşturur.

2) R'nin bütün özalt ideallerini içeren TEK bir maksimal ideal vardır.

İspat: m = {R'nin tersi olmayan elemanları} kümesi R'nin bütün özalt ideallerini kapsar, çünkü bu idealler tersinir eleman içerselerdi R'nin birimini içerirlerdi. □

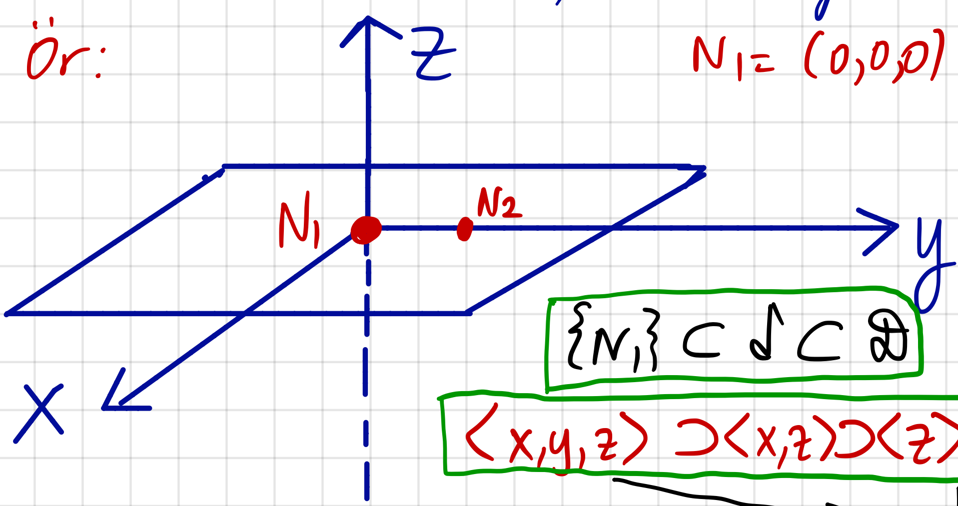
Tanım: Lemma'daki özelliklerden birine sahip halkalara yerel halka denir.

Ör: $R=K[x]$ yerel halka değildir, çünkü

$x+1, -x\in m$ = {R'nin sabit olmayan polinomları} iken

$(x+1)+(-x)=1\notin m$ olduğundan m ideal değildir.

Ör:



$N_1=(0,0,0)$ $N_2=(0,1,0)$

$\ell=\{(x,y,z)\in K^3 \mid x=0=y\}$

$\mathfrak{D}=\{(x,y,z)\in K^3 \mid z=0\}$

$\{N_1\}\subset \ell\subset \mathfrak{D}$ ve $\{N_2\}\subset \ell\subset \mathfrak{D}$

$\langle x,y,z\rangle\supset\langle x,z\rangle\supset\langle z\rangle$ ve $\langle x,y-1,z\rangle\supset\langle x,z\rangle\supset\langle z\rangle$

maksimal

$\mathcal{O}_p(V)$ halkasının yerel halka olduğunu göstermeden önce bir kaç tanım verelim. $f \in \mathcal{O}_p(V)$'nin farklı $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ temsilcileri için $\frac{a(P)}{b(P)} = \frac{c(P)}{d(P)}$'dir, çünkü $ad - bc \in I(V)$'dir. Seçilen temsilciye bağlı olmadığından f'nin P'deki değeri $f(P) := \frac{a(P)}{b(P)}$ olarak tanımlanır.

$m_p(V) := \{ f \in \mathcal{O}_p(V) \mid f(P) = 0 \}$ kümesi, $\varphi : \mathcal{O}_p(V) \to k$, $f \mapsto f(P)$ halka homomorfizminin çekirdeğidir.

φ örten olduğundan, $\mathcal{O}_p(V)/m_p(V) = \mathcal{O}_p(V)/\text{çek}\,\varphi \cong k$ ve dolayısıyla $m_p(V)$ bir maksimal idealdir.

$f \in \mathcal{O}_p(V)$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ $f(P) \neq 0$ $\left(f = \frac{a}{b} \text{ için } f^{-1} = \frac{b}{a} \right)$

olduğu için $m_p(V) = \{ f \in \mathcal{O}_p(V) \mid f\text{'nin tersi yok} \}$ olur.

Böylece, $\mathcal{O}_p(V)$'nin TEK maksimal ideali $m_p(V)$ olan bir yerel halka olduğu görülür. Bu halkalar, V'nin p civarındaki (yerel) özelliklerini belirlemek için önemli aygıtlardır.

Önerme: $\mathcal{O}_p(V)$ Noetheryan yerel bir tamlık bölgesidir.

İspat: $\mathcal{O}_p(V)$'nin tamlık bölgesi olduğu kolayca görülür: $f, g \in \mathcal{O}_p(V)$ ve $f(P)g(P) = (fg)(P) = 0$ iken $f(P) \neq 0$ ve $g(P) \neq 0$ ise $1 = g^{-1}(P) \cdot f^{-1}(P) \cdot f(P) \cdot g(P) = 0$ çelişkisi çıkar.

$\mathcal{O}_p(V)$'nin Noetheryan olduğunu göstermek için her I idealinin sonlu üreteçli olduğunu ispatlamalıyız. $k[V]$ Noetheryan olduğundan $I \cap k[V]$ ideali sonlu üreteçlidir. $\langle f_1, \dots, f_r \rangle$ olsun.

I'nın $\mathcal{O}_P(V)$ halkasında da $f_1, \dots, f_r$ tarafından üretildiğini göstereceğiz. Bunun için $f \in I$ alalım. $a, b \in k[V]$ ve $b(P) \neq 0$ için $f = \frac{a}{b}$ ise $bf \in I \cap k[V]$ olur. $bf = \sum_{i=1}^{r} a_i f_i$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_r \in k[V]$ vardır.

$\Rightarrow f = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{a_i}{b}\right) \cdot f_i$ olur. $\square$

BÖLÜM 3: DÜZLEM EĞRİLERİNİN YEREL ÖZELLİKLERİ

3.1 Katlı Noktalar ve Teğet Doğruları:

$F, G \in k[x,y]$ olsun. $F = \lambda G$ olacak şekilde $\lambda \in k$ varsa F ve G'ye denktir denir. Bu bir denklik bağıntısı tanımlar. Bu bağıntıya göre her bir denklik sınıfına bir düzlem eğrisi denir. Mesela $y^2 - x^3$ eğrisi ile $2(y^2 - x^3)$ eğrisi aynıdır. Bazen bu eğriye $y^2 = x^3$ eğrisi de diyeceğiz.

F polinomunun derecesine F eğrisinin derecesi denir. Doğrular 1. derece eğriler, parabol, elips ve hiperbol 2. derece (cebirsel) eğrilerdir.

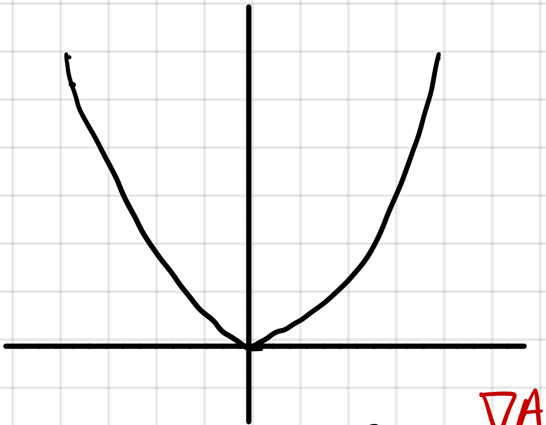
Eğer $F = \prod_i F_i^{e_i}$ ise F_i'ye F'nin bileşeni e_i'ye ise bu bileşenin katlılığı denir. $e_i = 1$ iken F_i'ye basit bileşen değilken katlı bileşen denir.

$V(F)$ bilinirse F_i'lerin denklik sınıfı bulunabilir ama F_i'nin katlılığı elde edilemez.

F indirgenemez ise $V(F) \subseteq \mathbb{A}^2$ bir çeşitlem olur. Bu durumda $k[V(F)]$, $k(V(F))$ ve $\mathcal{O}_P(V(F))$ yerine sadece $k[F]$, $k(F)$ ve $\mathcal{O}_P(F)$ yazacağız.

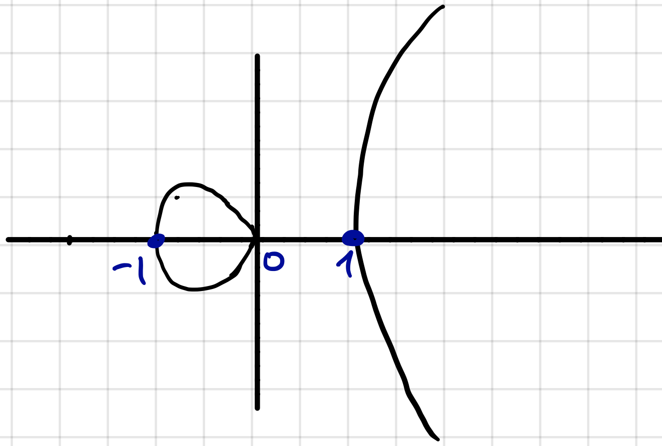
F bir eğri $P = (a,b) \in F$ iken $F_x(P) \neq 0$ veya $F_y(P) \neq 0$ yani $\nabla F|_P \neq (0,0)$ ise P'ye F'nin basit noktası denir. Bu durumda $F_x(P)(x-a) + F_y(P)(y-b) = 0$, F'nin P'deki teğet doğrusu olur. Basit olmayan noktalara tekil/düzenli olmayan nokta denir. Bütün noktaları basit olan eğriye tekil-olmayan yada <u>düzgün / düzenli</u> eğri denir. Şimdi bir kaç eğri örneği verelim. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olduğundan $k=\mathbb{C}$ iken çizeceğimiz grafikler eğrinin reel kısmını yansıtacak.

Örnekler:

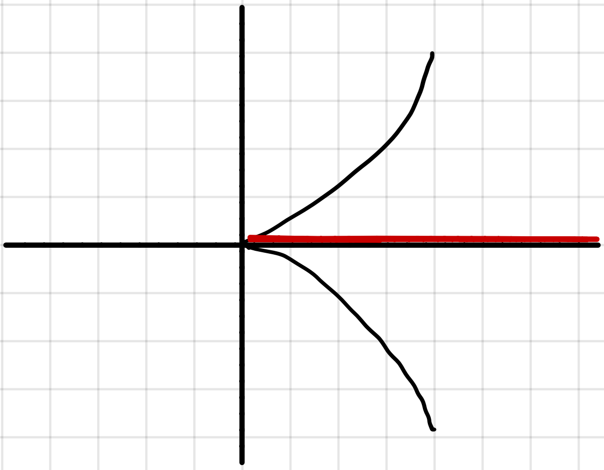


$A = y - x^2$

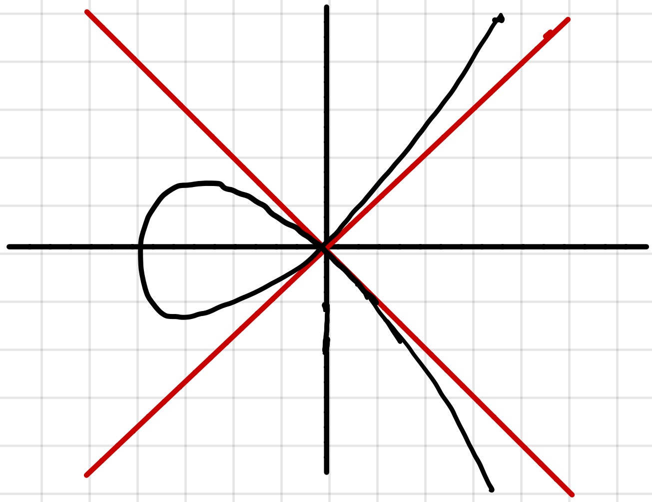
$\nabla A = (-2x, 1) \neq (0,0)$
$\Downarrow$
A tekil-olmayan.



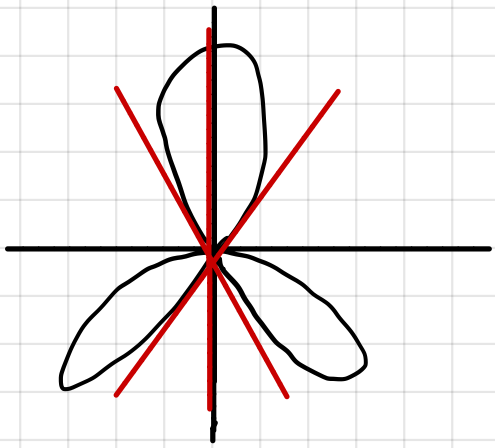
$B = y^2 - x^3 + x$



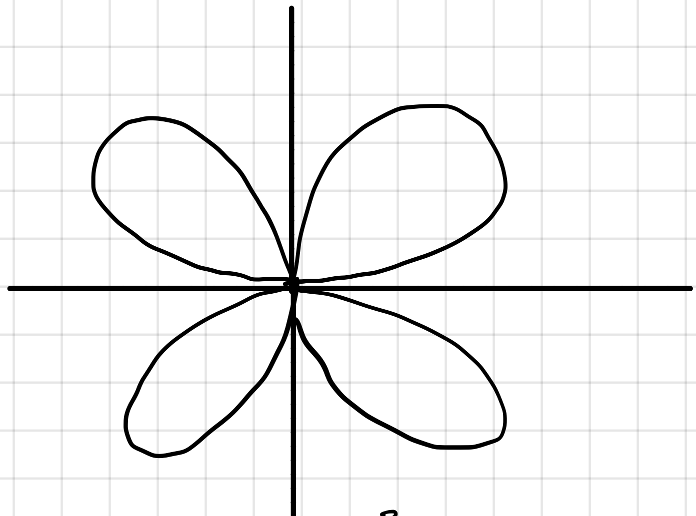
$C = y^2 - x^3$



$D = y^2 - x^2 - x^3$



$E = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$



$F = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$

$\nabla B = (-3x^2+1, 2y) = (0,0) \iff 3x^2 = 1$ ve $y=0$. $\iff x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, y=0$

$B(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \neq 0$ olduğundan B'nin bütün noktaları basit. Dolayısıyla B tekil-olmayan bir eğri.

B'nin orijindeki teğet doğrusu; $\nabla B|_{(0,0)} = (1,0)$ olduğundan $\nabla B|_{(0,0)} \cdot (x,y) = 0$ yani $\boxed{x=0}$ şeklindedir.

Dikkat edilirse $B = y^2 - x^3 + \boxed{x}$'in derecesi en az olan homojen kısmı x'e eşittir.

$\nabla C|_P = (-3x^2, 2y) = (0,0) \iff P = (0,0) \in C$, olduğundan

C'nin tek tekilliği $P=(0,0)$ katlı noktasındadır.

C'nin orijinde teğet doğrusu yoktur. Ancak P dışındaki bütün noktaların teğeti vardır. P dışındaki noktalar P'ye yaklaştıkça teğetlerin de x-eksenine yaklaştığına dikkat edersek $y=0$ (ya da $\boxed{y^2}=0$) doğrusunun P'deki teğete en iyi yaklaşım olduğunu görürüz.

Not: C'nin derecesi en küçük homojen kısmı y^2'dir.

Benzer şekilde D, E ve F'nin de sadece $P=(0,0)$'da tekilliğe sahip olduğunu ve yine teğet doğrusuna en iyi alternatifin derecesi en küçük homojen kısım tarafından sağlandığını görürüz:

$$D = \underbrace{y^2 - x^2}_{D_2} \underbrace{- x^3}_{D_3} \qquad E = \underbrace{3x^2y - y^3}_{E_3} + \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{E_4} \qquad F = \underbrace{-4x^2y^2}_{F_4} + \underbrace{(x^2+y^2)^3}_{F_6}$$

$D_2 = 0 \iff \underbrace{y = x \text{ veya } y = -x}_{\text{iki doğru}}$ $\quad E_3 = 0 \iff \underbrace{y=0,\ y=\sqrt{3}x \text{ veya } y=-\sqrt{3}x}_{\text{üç doğru}}$ $\quad F_4 = 0 \iff \underbrace{x=0 \text{ veya } y=0}_{\text{iki doğru}}$

F bir eğri, $P=(0,0)$ olsun. F'yi $F=F_m+F_{m+1}+\dots+F_n$ şeklinde homojen kısımlarının toplamı olarak yazarsak $F_m\neq 0$ olan en küçük m'ye F'nin P'deki katlılığı denir, $m_P(F)$ ile gösterilir. Dikkat edilirse $P\in F \Leftrightarrow m_P(F)>0$.

F_i derecesi i olan bir form $\Leftrightarrow$ $F_i=\sum\limits_{j+k=i} a_{jk}x^jy^k$.

$\dfrac{\partial F_i}{\partial x}=\sum\limits_{j+k=i} j\cdot a_{jk}\cdot x^{j-1}y^k$ ve $\dfrac{\partial F_i}{\partial y}=\sum\limits_{j+k=i} k\cdot a_{jk}x^jy^{k-1}$ olduğu

için $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x},\dfrac{\partial F_i}{\partial y}\right)\Big|_P=(0,0) \Leftrightarrow i>1$, çünkü

$i>1$ iken kısmi türevlerde x veya y'nin bir kuvveti bulunur, $i=1$ iken $F_1(x,y)=a_{10}x+a_{01}y$ olduğundan $\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x},\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)\Big|_P=(a_{10},a_{01})\neq(0,0) \Leftrightarrow F_1\neq 0$ olur.

Dolayısıyla, $m_P(F)>1 \Rightarrow \left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{(0,0)}=(0,0)$.

$m_P(F)=1 \Rightarrow F=F_1+F_2+\dots+F_n$ ve $F_1\neq 0$ olduğundan $\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x},\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)\Big|_P\neq(0,0)$ ve dolayısıyla $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_P\neq(0,0)$ olur.

Yani, P basit $\Leftrightarrow$ $m_P(F)=1$ olduğu görülür.

Bu durumda F'nin P'deki teğetinin denklemi $F_1=0$'dır.

NOT: Eğrinin orijinde tekilliği olup olmadığını F polinomunun en küçük dereceli homojen bileşenine bakarak anlayabiliriz.

Tanım: $m_P(F)=2$ ise P'ye ikikatlı, $m_P(F)=3$ ise üçkatlı nokta denir. Genel olarak, $m_P(F)>1$ ise P'ye çokkatlı nokta denir. (P, Tekkatlı $\Leftrightarrow m_P(F)=1 \Leftrightarrow P$, basit !)

F_m iki değişkenli homojen bir polinom olduğundan $F_m = \prod L_i^{r_i}$ olacak şekilde farklı L_i doğruları vardır. (Bkz. § 2.6'daki Sonuç.)

L_i'lere F'nin $P=(0,0)$'deki teğet doğrusu, r_i'lere bu teğetlerin katlılığı denir. $r_i=1$ ($r_i=2$ vb.) ise basit (ikikatlı) teğet denir.

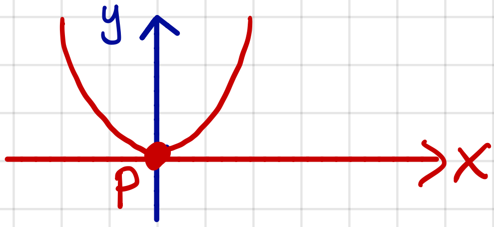
F'nin m farklı (basit) teğeti varsa, P'ye adi katlı nokta denir. Adi ikikatlı noktaya düğüm (node) denir.

P'den geçen bir doğru eğriye P'de teğet değilse sıfır-katlı teğet demekte fayda vardır.

Ör: $C = y^2 - x^3$ için $F_2 = y^2 = L_1^2$ yani $P=(0,0)$ noktası ikikatlı bir tekillik, x ekseni (L_1 doğrusu) ikikatlı teğet doğrusudur. (Adi olmayan katlılık)

$D = y^2 - x^2 - x^3$ için $F_2 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = L_1 L_2$ yani $P=(0,0)$ iki katlı tekilliğindeki L_1 ve L_2 teğet doğruları basit teğetlerdir. (Adi katlılık) $P \to$ düğüm ?

$\ast$ $F = \prod F_i^{e_i}$, F'nin indirgenemez bileşenlerinin çarpımı şeklinde yazılışı olsun. $mp(F) = \sum_i e_i \cdot mp(F_i)$ ve L, F_i'nin r_i-katlı teğeti ise F'nin $\sum e_i r_i$-katlı teğeti olur, çünkü F'nin derecesi en küçük homojen kısmı F_i'lerin derecesi en küçük homojen kısımlarının çarpımıdır. Bu durumda, P basit noktadır $\Longleftrightarrow$ P, F'nin sadece bir basit ($e_i=1$) bileşeninin basit noktasıdır.

Ör: 

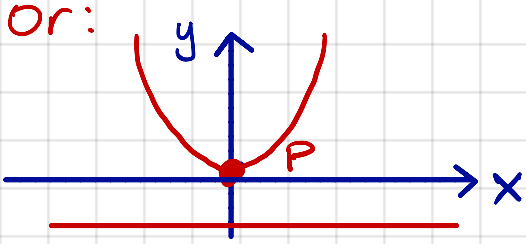
$F_1 = y \quad F_2 = y - x^2 \quad F = F_1^3 F_2$

$V(F) = \underbrace{V(F_1)}_{x\text{-ekseni}} \cup \underbrace{V(F_2)}_{\text{parabol}}$

$F = y^4 - x^2y^3 \to P$'nin katlılığı $4 = 3\, m_p(F_1) + 1 . m_p(F_2)$.

$L = y$ doğrusu (yani x-ekseni) F_1 ve F_2'nin basit teğetleridir; $r_1 = r_2 = 1$. L, F'nin $4 = 3r_1 + 1r_2$ katlı teğeti.

P, F_1'in ve F_2'nin basit noktasıyken F'nin katlı noktası oldu.

Ör: 

$F_1 = y+1 \quad F_2 = y - x^2 \quad F = F_1^2 F_2^{e_2}$

P, F_2'nin basit noktasıdır.

P, F'nin basit noktası $\Leftrightarrow e_2 = 1$.

Uyarı: $P = (a,b) \neq (0,0)$ iken $T(x,y) = (x+a, y+b)$ afin dönüşümünü kullanarak yukarıdaki tanımlar P'ye uyarlanabilir.

$F^T = F(x+a, y+b)$ için $m_p(F) := m_{(0,0)}(F^T)$ olarak tanımlanır.

$F^T = G_m + G_{m+1} + \dots + G_n$, $G_m \neq 0$ ve $m = m_p(F)$ olsun.

$G_m = \prod L_i^{r_i}$, $L_i = \alpha_i x + \beta_i y$ ise $\underline{\alpha_i(x-a) + \beta_i(y-b)}$ F'nin P'deki $\underline{r_i\text{-katlı teğetleri}}$ olarak tanımlanır.

Böylece, T; F^T'nin noktalarını F'nin noktalarına ve F^T'nin $(0,0)$'daki teğetlerini F'nin P'deki teğetlerine taşır.

$F_x(P) = F_x^T(0,0)$ ve $F_y(P) = F_y^T(0,0)$ olduğundan, P F'nin basit noktasıdır $\Leftrightarrow m_p(F) = 1$'dir.

$m_p(F) = 1$ ise $F^T = G_1 + \dots + G_n$, $G_1 = \alpha(x-a) + \beta(y-b)$ olur.

P, F'nin basit noktası ise teğetinin denklemi $G_1 = 0$'dır, çünkü $F_x^T(0,0) = \left.\frac{\partial G_1}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \alpha$ ve $F_y^T(0,0) = \left.\frac{\partial G_1}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \beta$.