# Analiz - 4

$(\mathbb{N}, +)$ $\quad a+b \in \mathbb{N}$

$a+b = b+a$

$a+(b+c) = (a+b)+c$

$0+a = a+0$

$((\mathbb{Z}, +), \cdot)$ $\quad a+(-a) = 0 = (-a)+a$

↳ değişmeli grup

↳ $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a(bc) = (ab)c$

$1 \cdot a = a \cdot 1$

$a(b+c) = (b+c)a$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ değişmeli grup

↳ d.g.

$a(b+c) = (b+c) \cdot a$ $\Big\}$ cisim

$V \neq \emptyset$ bir küme olsun.

$(V, +, \cdot)$ $\quad + : V \times V \rightarrow V$ değişmeli grup

$(u, w) \mapsto u+w$

$\cdot : F \times V \rightarrow V$

$(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cisim, vektör uzayı

skaler çarpma

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

$\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı

$(\mathbb{R}^2, +)$ $\quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$

↳ d.g. $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot (v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2) \in \mathbb{R}^2$

$\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$

$\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2) v = \alpha_2(\alpha_1 v)$

$1 \cdot v = v$

**Örnek:** $A = \{ p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2 \}$ kümesinin en büyük elemanı olmadığını gösteriniz.

**İspat:** Her $p \in A$ için

$$q = p - \frac{p^2-2}{p+2}$$ alalım. $q > p$ 'dir

ve

$$q = \frac{p^2+2p-p^2+2}{p+2} = \frac{2p+2}{p+2}$$

$$q^2 = \frac{4(p^2+2p+1)}{p^2+4p+4} \Rightarrow q^2-2 = \frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2} < 0$$

$$\Rightarrow q^2 - 2 < 0 \Rightarrow q^2 < 2 \Rightarrow q \in A$$

$$q \in A \Rightarrow q_1 = q - \frac{q^2-2}{q+2} \Rightarrow q_1 > p$$

$$\Rightarrow q_1 \in A$$

ekus = (IR'nin alt kümesi boş değil ve üstten sınırlı)

eküs = sup

⇒ $\sqrt{2}$'den küçük her $q \in \mathbb{Q}$ için bir tane $q' \in \mathbb{Q}$ vardır. öyle ki: $q' < \sqrt{2}$ ve $q' > q$

⇒ $\sqrt{2}$'den küçük en büyük rasyonel sayı yoktur.

⇒ A'nın en büyük elemanı yoktur.

$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2 \}$ en küçük elemanı yoktur.

**Tanım:** $S \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde tanımlı bir bağıntı $\leq$ olsun.

Her $a, b, c \in S$ için

(i) Yansıma: $a \leq a$
(ii) Ters simetri: $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
(iii) Geçişme: $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
(iv) Kıyaslanabilirlik: $a \leq b \vee b \leq a$

(i)–(iii): Kısmi Sıralama Bağıntısı → S poset

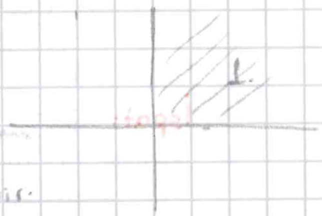
(i)–(iv): → Tam Sıralama Bağıntısı → S zincir

$(\mathbb{R}^2, \leq_n)$ $\quad x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$ $\quad$ poset

$a \in \mathbb{R}$ pozitif eğer $a \geq 0$

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pozitiftir eğer $(x_1, x_2) \geq (0,0)$

$x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$



**Lemma:** $A \subset \mathbb{R}$ kümesi sınırlı olmak üzere $\sup A$ varsa tektir.

$( \exists m, M \in \mathbb{R}$ vardır $\ni$ $\forall a \in A$ için $m \leq a \leq M )$

**İspat:** $\sup A = \alpha$ ve $\sup A = \beta$, $\alpha \neq \beta$ olsun.

$\sup A = \alpha$ alınırsa ve $\beta$ üst sınır olacağından $\forall a \in A$ için $a \leq \alpha < \beta$

$\sup A = \beta$ alınırsa ve $\alpha$ üst sınır olacağından $\forall a \in A$ için $a \leq \beta < \alpha$

$\alpha < \beta \wedge \beta < \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ ↯

tamsıralı

**Ödev:** Kısmi sıralı S posetinde $A \subset S$ sınırlı alt kümesi olsun. sup A var ise tektir. Doğru ise ispatlayınız. Yanlış ise örnek veriniz.

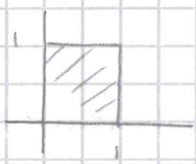
$x_1 \neq x_2$ $\quad x_1 = \sup A$ $\quad x_2 = \sup A$ olsun. $\quad$, $a \in A$ olsun.

$x_1 = \sup A \Rightarrow (a \in A \Rightarrow a \leq x_1)$, $x_2 = \sup A$, $x_2 \in A$ $\quad \} \; x_2 \leq x_1$

$x_2 = \sup A \Rightarrow (a \in A \Rightarrow a \leq x_2)$, $x_1 = \sup A$, $x_1 \in A$ $\quad \} \; x_1 \leq x_2$

$x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$ ↯

**Örnek:** $A = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$



$(\mathbb{R}^2, \leq_n)$

sup, inf, max, min ?

**Lemma:** $(S, \leq)$ sıralı küme ve $A \subset S$ alt kümesi üstten sınırlı olsun. Eğer sup A (en küçük üst sınır) var ise S kümesine (eküs) özelliğini sağlıyor denir.

$\mathbb{Q}$ eküs / sup özelliğine sahip değildir.

$A = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2 \}$ sup A = en küçük B = yok

$B = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 > 2 \}$

$\mathbb{R}$ eküs - sup özelliğine sahiptir.

(-) **Teorem:** $(S, \leq)$ sıralı kümesi eküs özelliğine sahipse ebas özelliğinede sahiptir.

ebas özelliği $\equiv$ alttan sınırlı her kümenin inf vardır.

**İspat:** $A \subset S$ alt kümesi alttan sınırlı olsun.
L kümesi A'nın alt sınırların hepsinin bulunduğu küme olsun.
A alttan sınırlı olduğundan $L \neq \emptyset$ ayrıca L kümesi üstten sınırlıdır.

$L \subset S$, üstten sınırlı ve S eküs özelliğine sahip ise sup L vardır.

$\alpha = \sup L$ olalım (iddia: $\alpha = \inf A$)

L kümesinin üst sınırıdır $\Rightarrow$ $\alpha \in A$ olabilir.

Eğer $\alpha \in A$ ise Her $a \in A$ için $\alpha \leq a$ $\Rightarrow$ $\alpha = \min A$ vardır ve $\alpha = \sup L = \min A = \inf A$

Eğer $\alpha \notin A$ ise $\alpha = \inf A$ olmasın

$\alpha$, A'nın altsınırı $\exists \lambda \in L$ vardır $\ni$ $\alpha \leq \lambda \leq a$

$\alpha = \sup L \leq \lambda$

$\Rightarrow \alpha = \inf A$

**Örnek:** $A, B \subset \mathbb{R}$ içinde üstten sınırlı kümeler olsun.

$C = \{ a+b : a \in A,\ b \in B \}$ kümesi üstten sınırlıdır ve

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

**İspat:** $\sup A$ ve $\sup B$ vardır.

$\forall a \in A$ için $a \leq \sup A$ ve $\forall b \in B$ için $b \leq \sup B$

$\forall c \in C$ için $\exists a \in A$, $\exists b \in B$ vardır $\ni$ $c = a+b \leq \sup A + \sup B$

$\Rightarrow$ $C$ kümesi üstten sınırlı

$\Rightarrow$ $\sup C$ vardır.

$\Rightarrow$ $\sup C \leq \sup A + \sup B$

**not!** $a, b \in \mathbb{R}$ o.u. her $\varepsilon > 0$ için $a \leq b + \varepsilon \Rightarrow a \leq b$ olur.

**İspat:** $a > b$ olsun.

$\Rightarrow a - b > 0$

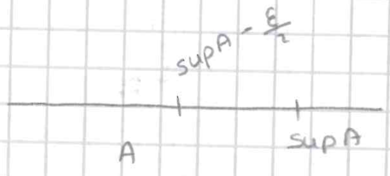
$\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ alalım. $a \leq b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$

$\Rightarrow a \leq b$ olur.

**İddia:** $\sup C \geq \sup A + \sup B$

$\varepsilon > 0$ alalım. $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ $A$ kümesinin üst sınırı olamaz. $\exists a \in A$ vardır $\ni$ $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} \leq a \leq \sup A$

$\sup B - \frac{\varepsilon}{2}$ $B$ kümesinin üst sınırı olamaz $\exists b \in B$ vardır $\ni$ $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} \leq b \leq \sup B$ olur.




$\Rightarrow \sup A + \sup B - \varepsilon \leq a + b = c \leq \sup C$

$\Rightarrow \sup A + \sup B \leq \sup C + \varepsilon$

**nottan** $\Rightarrow$ $\sup A + \sup B \leq \sup C$ olur.

**Tanım:** Her artan üstten sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin supremumu var ise $(S, \leq)$ sıralı kümesine tamdır denir.

## Tanım: Arsimet özelliği

$(\mathbb{F}, +, \cdot)$ sıralı cismi o.ü. $\forall x, y \in \mathbb{F}$ ve $x > 0$ için bir tane $n \in$ [illegible] vardır öyle ki $n \cdot x > y$ olur. Koşulu sağlanıyor ise $\mathbb{F}$ cismi arsimet özelliğini sağlar denir.

**Teorem:** $\mathbb{R}$ cismi arsimet özelliğini sağlar

**İspat:** $\mathbb{R}$ arsimet özelliğini sağlamasın.

$\exists x, y \in \mathbb{F}$ ve $x > 0$ durumunda her $n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y$ olur.

$A = \{ nx : nx \leq y \} \neq \emptyset$ üstten sınırlıdır

$\Rightarrow$ $\sup A$ vardır.

$0 < \alpha = \sup A$ diyelim.

$x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$\Rightarrow \alpha - x < \alpha = \sup A$

$\Rightarrow \alpha - x$ A kümesinin üst sınırı değildir.

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\alpha - x < mx$

$\Rightarrow \alpha < mx + x = x(m+1) \in A$ ?

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $x > 0$ için

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ni nx > y$

**Örnek:** $B = \left\{ \frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\sup B = 0$ old. gös.

$B = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \right\}$ $\quad 0 \in \mathbb{R}$ B kümesinin üst sınırıdır.

eküs $B = 0$ olmasın

$\exists x < 0$ olsun $\ni$ $\sup B = x$ olsun.

$x < 0 \Rightarrow -x > 0$, $1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$

$\Rightarrow n(-x) > 1$

$\Rightarrow -x > \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x < \frac{-1}{n}$ $\Rightarrow$ x, B'nin üst sınırı değildir ?

$\Rightarrow x \neq \sup B$

$\Rightarrow \sup B = 0$ olur.

**Örnek:** $B = [0,1) \cup \{4\}$ $\quad \sup B = 4 = \max B$

**Teorem:** Her $x,y \in \mathbb{R}$, $x<y$ sayısı için $\exists q \in \mathbb{Q}$ vardır $\ni$ $x<q<y$ olur.

($\exists r \in \mathbb{Q}$ $\ni$ $x<r<y$ olur)

**İspat:** $x<y \Rightarrow y-x>0$, $1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ni n(y-x)>1 \quad (ny > nx+1)$

(?) $\left\{ \begin{array}{l} nx,\ -nx \in \mathbb{R},\quad 1>0 \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \text{Anlamadım.} \\ \exists m_1 \in \mathbb{N} \text{ vardır } \ni m_1 \cdot 1 > nx \\ \exists m_2 \in \mathbb{N} \text{ vardır } \ni m_2 \cdot 1 > -nx \end{array} \right.$

$-m_2 < nx < m_1$

$\exists m \in \mathbb{Z}$ vardır $\ni$ $-m_2 \leq m \leq m_1$

$\Rightarrow m-1 \leq nx < m$

$\Rightarrow nx < m \leq nx+1 < ny$

$\Rightarrow nx < m < ny$

$\Rightarrow x < \frac{m}{n} < y$

$\frac{m}{n} = q \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}$

$i = 1, \dots, n$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektör uzayı

$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} + \vec{y} = (x_i + y_i)_{i=1}^n$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$

$(\alpha, \vec{x}) \mapsto \alpha \cdot \vec{x} = (\alpha x_i)_{i=1}^n$

**Metrik Uzay:**

$X$ bir küme olsun.

$d: X \times X \mapsto \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto d(x,y)$ fonksiyonu

$\forall x,y,z \in X$

1) $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \iff x=y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ koşulları sağlanıyor ise metrik adını alır ve $(X,d)$ metrik uzay adı verilir.

**Örnek:** $\mathbb{R}^n$ kümesi olsun.

**$d_2$, 2-metriği, öklid alışılmış, standart metrik**

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$$

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

1.) $d_2(x,y) \geq 0$

$d_2(x,y) = 0 \iff x = y$

2.) $d_2(x,y) = d_2(y,x)$

3.) $d_2^2(x,z) = (x_1-z_1)^2 + \dots + (x_n-z_n)^2$

$-2x_1z_1$

$$= (x_1-y_1+y_1-z_1)^2 + \dots + (x_n-y_n+y_n-z_n)^2$$

$$(?) \quad \leq \big((x_1-y_1) + (y_1-z_1)\big)^2 + \dots + \big((x_n-y_n) + (y_n-z_n)\big)^2 \quad (?)$$

$2\cdot(x_1-y_1)\cdot(y_1-z_1)$

$$\leq \big(d_2(x,y) + d_2(y,z)\big)^2$$

$$\Rightarrow d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$$

**Örnek:** $\mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde

**$d_1$, 1-metriği, taxicab metriği**

$$d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto d_1(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

1.) $d_1(x,y) \geq 0$ ve

$d_1(x,y) = 0 \iff |x_1-y_1| = 0 \wedge |x_2-y_2| = 0$

$\iff x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$

2.) $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

$= |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$

$= d_1(y,x)$

3.) $d_1(x,z) = |x_1-z_1| + |x_2-z_2|$

$= |x_1-y_1+y_1-z_1| + |x_2-y_2+y_2-z_2|$

$\leq |x_1-y_1| + |y_1-z_1| + |x_2-y_2| + |y_2-z_2|$

$= d(x,y) + d(y,z)$

$$d_p(x,y) = \big(|x_1-y_1|^p + \dots + |x_n-y_n|^p\big)^{1/p} \qquad 1 \leq p < +\infty$$

**Örnek:** $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$

$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \sup_{(\max)} \{ |x_1-y_1|, |x_2-y_2| \}$

$d_\infty$, sup, düzgün, uniform sonsuz metriği

1.) $d_\infty(x,y) \geq 0$

$d_\infty(x,y) = 0 \iff \max \{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = 0$

$\iff |x_1-y_1| = 0 \wedge |x_2-y_2| = 0$

$\iff x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \iff \vec{x} = \vec{y}$

2.) $d_\infty(x,y) = \max \{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = \max \{ |y_1-x_1|, |y_2-x_2| \} = d_\infty(y,x)$

3.) $d_\infty(x,z) = \max \{ |x_1-z_1|, |x_2-z_2| \}$

$\leq \max \{ |x_1-y_1| + |y_1-z_1|, |x_2-y_2| + |y_2-z_2| \}$

$= \max \{ |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \} + \max \{ |y_1-z_1| + |y_2-z_2| \}$

$= d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$

* X bir küme o.ü.

$$d_d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ metriğine ayrık metrik denir.

**Ön bilgi:** X küme o.ü. $P(x)$ kuvvet kümesi olsun.

$\tau \subset P(x)$

1.) $\emptyset, X \in \tau$

2.) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

3.) $\bigcup A_i \in \tau$ ise $(X, \tau)$ topolojik uzay denir. koşulları sağlanıyor

$A \in \tau$ kümesine açık küme denir.

$(X, d)$ metrik uzayı olmak üzere

Açık yuvar

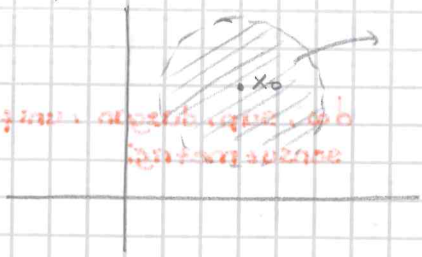
$B_d(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X : d(x_0, x) < \varepsilon \}$ olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde

$d_2$ metriğine göre $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$

$B_2(x_0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, x_0) < \varepsilon \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \varepsilon \}$





$B_2(x_0, \varepsilon)$

$d_1$ metriğine göre

$B_1(x_0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d_1(x, x_0) < \varepsilon \}$

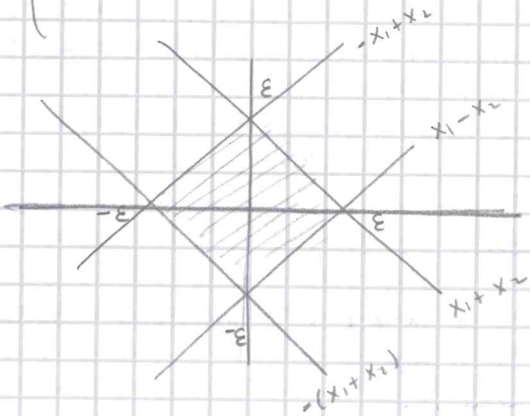
$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0| < \varepsilon \}$

0 - merkezli $\varepsilon$ yarıçaplı

$B_1(0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 0| + |x_2 - 0| < \varepsilon \}$

$|x_1| + |x_2| < \varepsilon$

$$|x_1| + |x_2| = \begin{cases} x_1 + x_2, & x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2, & x_1 \geq 0 \wedge x_2 < 0 \\ -x_1 + x_2 & x_1 < 0 \wedge x_2 \geq 0 \\ -(x_1 + x_2) & x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 \end{cases}$$



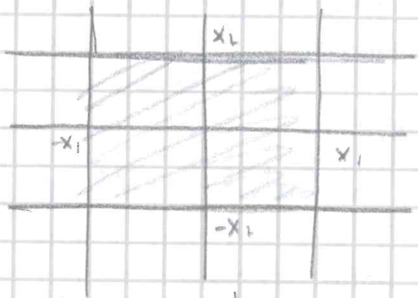


$d_\infty$ metriğine göre

$B_\infty(0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, 0) < \varepsilon \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x_1 - 0|, |x_2 - 0| \} < \varepsilon \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : \max \{ |x_1|, |x_2| \} < \varepsilon \}$





$\varepsilon > |x_1| \geq |x_2|$ veya $\varepsilon > |x_2| \geq |x_1|$

7. $\mathbb{R}^2$ üzerinde ayrık metriğe $d_d$ göre

$B_d(0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d_d(x, 0) < \varepsilon \}$

$$d_d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \qquad 0 \leq \varepsilon < 1$$

$\Rightarrow d_d(x, 0) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow B_d(0, \varepsilon) = \{0\}$

$\varepsilon \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_d(x,0) = 1$

$\Rightarrow B_d(0,\varepsilon) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ve $d_d(x,0) = 0$

$B_d(0,\varepsilon) = \{0\}$

$\Rightarrow B_d(0,\varepsilon) = \mathbb{R}^2$

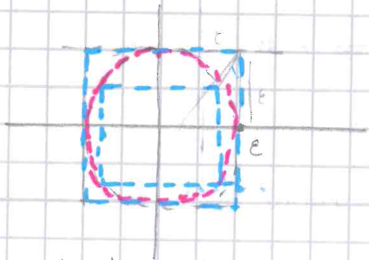
$\{y\}, \{x\}$ açık küme

$\Rightarrow \{x\} \cup \{y\} = \{x,y\}$ açık küme

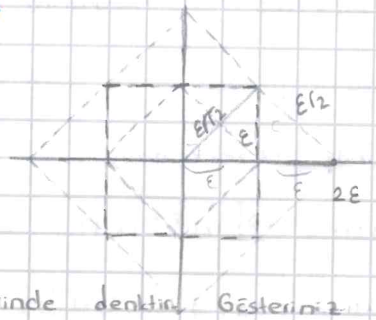
$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_d) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

**Tanım:** $X$ kümesi üzerinde $d_1$ ve $d_2$ iki metrik olsun. Eğer bir tane $m, M \in \mathbb{R}_+$ her ve $m\,d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M.d_1(x,y)$ $\forall x,y \in X$ için sağlanıyor ise bu iki metriğe denk metrik denir.

$(\mathbb{R}^2, d_2)$ $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$




$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$




$\mathbb{R}^2$ üzerinde $d_1$ ve $d_2$ metriği

$m.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M.d_1(x,y)$

$\forall x,y \in \mathbb{R}^2$

**İddia:** $d_1$ ile $d_2$ $\mathbb{R}^2$ üzerinde denktir. Gösteriniz.

$d_2^2(x,y) = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$

$\leq (|x_1-y_1| + |x_2-y_2|)^2$

$\Rightarrow d_2^2 \leq d_1^2$

$\Rightarrow d_2 \leq d_1$

$|x_1-y_1| \leq d_2$

$|x_2-y_2| \leq d_2$

$\Rightarrow d_1 \leq 2d_2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} d_1 \leq d_2 \leq d_1$

**İddia:** $d_1$ ile $d_\infty$ metriği $\mathbb{R}^2$ üzerinde denktir.

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

$$\leq \sup\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} + \sup\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

$$\leq 2\, d_\infty(x,y) \qquad m=1, \ M=2 \quad \text{denk metrik}$$

**İddia:** $d_\infty$ ile $d_2$ ?

$$\sup\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{2 d_\infty^2}$$

$$= \sqrt{2}\, d_\infty \qquad m=1 \quad M=\sqrt{2}$$

**!Önemli**

$\mathbb{R}^n$'de tüm $d_p$ $1 \leq p \leq \infty$ metrikleri birbirine denktir.

**Tanım:** V bir vektör uzayı olmak üzere

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

fonksiyonu eğer

1.) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2.) Homojen $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

3.) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ koşullarını sağlıyor ise norm adını alır.

$(V, \|\cdot\|)$ uzayına normlu uzay denir.

**Örnek:** $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı

$x \in \mathbb{R}^2$ için $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$ $\quad \forall\ 1 \leq p \leq +\infty$

$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|\}$ $\quad p = +\infty$ **önemli**

**Ödev:** $\sup\{\alpha . A\} = \alpha . \sup\{A\}$ ispatlayınız

$\|\cdot\|_\infty$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir normdur.

**1.)** $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|\} \geq 0$

**2.)** $\|x\|_\infty = 0 \iff |x_1| = 0 \wedge |x_2| = 0 \iff x = (x_1, x_2) = 0$

**3.)** $\|\alpha x\|_\infty = \sup\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|\}$

$= \sup\{|\alpha||x_1|, |\alpha||x_2|\}$

$= |\alpha| . \sup\{|x_1|, |x_2|\}$

$= |\alpha| . \|x\|_\infty$

**4.)** $\|x+y\|_\infty = \sup\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\}$

$|x_1+y_1| \leq |x_1| + |y_1|$
$|x_2+y_2| \leq |x_2| + |y_2|$

$\leq \sup\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\}$

$= \sup\{(|x_1|, |x_2|) + (|y_1|, |y_2|)\}$

$= \sup\{|x_1|, |x_2|\} + \sup\{|y_1|, |y_2|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında

$\|x-y\| = d(x,y)$ fonksiyonu tanımlayalım.

**İddia:** $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ bir metriktir.

**1.)** $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$

$d(x,y) = \|x-y\| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$

**2.)** $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|-1\| \|y-x\| = d(y,x)$

**3.)** $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$

$\mathbb{R}^2$ üzerinde ayrık metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$x \neq z \neq y$

$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1+1 = 2$

$0 \neq x \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$

O halde norm türetmez.

$\alpha x \neq x$

$d(x,0) = 1 = \|x\|$

$d(\alpha x, 0) = 1 = \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\| = |\alpha|$

homojen değil

$(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında

$$B(x_0, \varepsilon) = \{ x \in V \; ; \; \underbrace{\|x - x_0\|}_{d(x, x_0)} < \varepsilon \}$$

**Tanım:** $V$, üzerinde $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlu tanımlı olsun.

$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in V$ koşulunu sağlayan $m, M \in \mathbb{R}_+$

var ise bu iki norma denk norm denir.

Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde tanımlı tüm normlar birbirine denktir.

**Tanım:** $(V, +, \cdot)$ vektör uzayı olmak üzere

$\langle \, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$
$\quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ fonksiyonu eğer

**1.)** $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**2.)** $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$

**3.)** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

**4.)** $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

koşullarını sağlıyor ise iç çarpım adını alır. $(V, \langle , \rangle)$ uzayına iç çarpım uzayı denir.

**Örnek:** $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ bir vektör o.u.

$\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

**1.)** $\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2 \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

**2.)** $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 = \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2) = \alpha \langle x, y \rangle = x_1 \cdot \alpha y_1 + x_2 \cdot \alpha y_2$
$= \langle x, \alpha y \rangle$

**3.)** $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \langle y, x \rangle$

**4.)** $\langle x, y + z \rangle = x_1 (y_1 + z_1) + x_2 (y_2 + z_2) = x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2$
$= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

$(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ bir iç çarpım uzayıdır.

**Örnek:** $V = C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ sürekli} \}$

$(C[0,1], +, \cdot)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

**1.)** $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0 = 0 \iff f^2(x) = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = 0$

**2.)** $\langle \lambda f, g \rangle = \int_0^1 (\lambda f)(x) . g(x) dx = \int_0^1 \lambda . f(x) . g(x) dx = \lambda . \langle f, g \rangle = \langle f, \lambda g \rangle$

**3.)** $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 g(x) f(x) dx = \langle g, f \rangle$

**4.)** $\langle f, g+h \rangle = \int_0^1 f(x) . (g(x) + h(x)) dx = \int_0^1 f(x) g(x) + f(x) h(x) dx$

$= \int_0^1 f(x) g(x) dx + \int_0^1 f(x) h(x) dx$

$= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$

→ $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle$

$= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

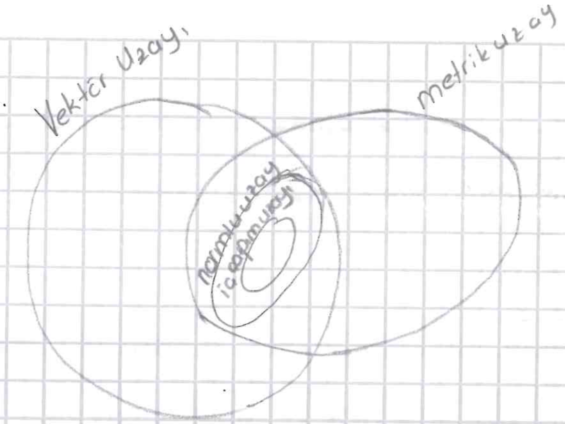
$= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

$= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$

$= \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$ Couchy - Schwarz Eşitsizliği

$= \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2$

$= (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$




normlu uzay $\Rightarrow$ metrik uzay
$\not\Leftarrow$
ayrık metrik (Örnek)

iç çarpım uzayı $\Rightarrow$ normlu uzay
$\not\Leftarrow$ $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

## $\mathbb{R}^n$ uzayının Topolojisi:

$((\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ vektör uzayı, $\|\cdot\|_p)$ $1\le p\le+\infty$ normlu uzayı olsun.

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ alt kümesi olsun.

$x_0\in A$ noktası olmak üzere en az bir tane $\exists\, \varepsilon>0$ var ve $B(x_0,\varepsilon)\subset A$ ise $x_0$ noktasına iç nokta denir.
(interior point)

$A^\circ = \text{Int}\,A = \{$ A'nın tüm iç noktalarının kümesi $\}$

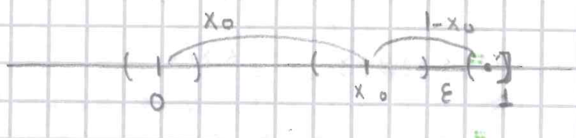
Eğer $A^\circ=\text{int}\,A=A$ ise A kümesine açık küme denir.

$x_0\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere her $(\forall)\ \varepsilon>0$ için $B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ ve $B(x_0,\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset$ ise $x_0$ noktasına sınır noktası denir.

$\partial A=\{$ A'nın sınır noktalarının kümesi $\}$

$(\mathbb{R},|\cdot|)$

$A=(0,1]$




$r=\min\{x_0,1-x_0\}$

$\varepsilon<r$ seçelim

$B(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R} : |x-x_0|<\varepsilon\}$

$=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)\subset A$

$\Rightarrow x_0$ iç noktadır.

$A^\circ=(0,1)$

$A\neq A^\circ$ açık küme değildir.

$\partial A=\{0,1\}$

A kümesi kapalıdır $\Leftrightarrow A^c$ açıktır.

**Tanım:** Tümleyeni "$A^c$" açık kümeye kapalı küme denir.

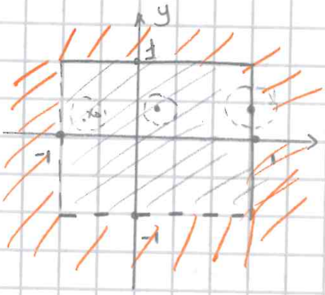
**Örnek:** $A = \{(x,y) : -1 < x \leq 1 \wedge -1 < y \leq -1\}$

$\vec{x} = (x_0, y_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$

$R = \min\{|x_0 - 1|, |y_0 - 1|\} > \varepsilon$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

$\vec{x_0} \in A \ \exists \ \exists \varepsilon < R$ vardır ve $B(x_0, \varepsilon) \subset A$




$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1 \wedge -1 < y < 1\}$

$(\overset{\circ}{A^c}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{$kapalı kare$\}$

$A^\circ = A$ A açık değildir

$(\overset{\circ}{A^c}) \neq A^c \Rightarrow A^c$ açık değil $\Rightarrow A$ kapalı değil

$\partial A = \{(x,y) : x = \mp 1$ ve $-1 \leq y < 1\} \cup \{(x,y) : y = \mp 1$ ve $-1 < x \leq 1\}$

$A^\circ \not\subset \partial A$

**Tanım:** $x_0 \in (\overset{\circ}{A^c})$ ise $x_0$ noktasına (exterior) A kümesinin dış noktası denir.

$(\overset{\circ}{A^c}) = Ext(A) = \{A$'nın dış noktaları$\}$

**Soru:** $(\overset{\circ}{A^c}) = A^c \iff A$ kapalıdır.

$\Updownarrow$

$A^\circ$ açık $\Rightarrow$ $(A^c)^c = A$

**Soru:** $(\overset{\circ}{A^c}) = (\overset{\circ}{A})^c$ ?

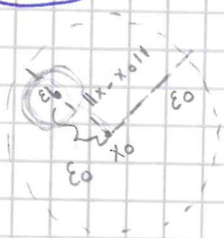
Açık $\neq$ kapalı


$A^\circ = A = (-1, 1)$ $\quad (\overset{\circ}{A})^c = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $\quad (\overset{\circ}{A})^c = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$(\overset{\circ}{A^c}) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Sadece $\emptyset$ ve $X = \mathbb{R}^n$ kümeleri hem açık, hem kapalıdır (clopen)

**Lemma:** $\mathbb{R}^n$'de açık yuvar açık kümedir. İspatlayınız.




İspat:

$B(x_0, \varepsilon_0)$ açık yuvar, Herhangi $x \in B(x_0, \varepsilon)$ noktasının iç nokta olduğunu göstermeliyiz.

$\exists \varepsilon > 0 \ \exists \ B(x, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_0)$

$r = \min\{\|x - x_0\|, \varepsilon_0 - \|x - x_0\|\}$ bir tane $0 < \varepsilon < r$ alabiliriz.

**İddia:** Alınan $\varepsilon$ için $B(x, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_0)$ $y \in B(x, \varepsilon)$ olsun. $(\|y - x\| < \varepsilon)$ (?)

$\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\|$

$< \varepsilon + \|x - x_0\|$

$< r + \|x - x_0\|$

Eğer;

$r = \varepsilon_0 - \|x - x_0\| < \varepsilon_0$

$r = \|x - x_0\| < 2\|x - x_0\| < \varepsilon_0$

**Örnek:** $(\mathbb{R}, |.|)$ normlu uzay tam sıralı cisim

$S = \{x\} \rightarrow S^c = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$

$S^\circ = ?$

$x \in S$ olmak ü. $\nexists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset S = \{x\}$

$\Rightarrow x \notin S^\circ$

$\Rightarrow S^\circ = \emptyset \Rightarrow S$ açık değil

$\neq$

$\overset{\circ}{S}$

$\partial S = ?$

$y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$B(y, \varepsilon) \cap S$ ve $B(y, \varepsilon) \cap S^c$

$\neq \quad\quad \neq$

$\emptyset \quad\quad \emptyset$

$y = x$ ise $B(x, \varepsilon) \cap S = \{x\} \neq \emptyset$

$B(x, \varepsilon) \cap S^c = B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \partial S$

$y \neq x$ için $y \notin \partial S$ ispatlayınız

$\varepsilon < \|y - x\|$ için $B(y, \varepsilon) \cap S = \emptyset$

$\Rightarrow y \notin \partial S$

Böylece $\partial S = S = \{x\}$

$S$ kapalı $\Leftrightarrow S^c$ açık $\Leftrightarrow (\overset{\circ}{S^c}) = (S^c)$

$(\overset{\circ}{S})^c = Ex + S = \mathbb{R} \setminus \{S^\circ \cup \partial S\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{x\} = S^c$

$\Rightarrow S^c$ açık

$\Rightarrow S$ kapalı $\quad$ $\mathbb{R}^n$ kümesinde tüm normlar için tek elemanlı kümeler kapalı kümedir.

**Teorem:** $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normlu uzayı için

a.) Açık kümelerin birleşimi açıktır.
b.) Açık kümelerin sonlu kesişimi açıktır.
c.) Kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalıdır.
d.) Kapalı kümelerin sonsuz kesişimi kapalıdır.

**İspat a:** $\mathbb{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi olsun. $\forall i \in I$ indis kümesi için;

**İddia:** $\bigcup_{i \in I} \mathbb{O}_i$ açık

Herhangi $x \in \bigcup_{i \in I} \mathbb{O}_i$ için $\exists i_0$ için $x \in \mathbb{O}_{i_0}$ olmasıdır. $\mathbb{O}_{i_0}$ açık küme olduğundan $x$ noktası $\mathbb{O}_{i_0}$ kümesinin iç noktasıdır. $\exists \varepsilon > 0$ $B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{O}_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \mathbb{O}_i$

$\Rightarrow x$, $\bigcup_{i \in I} \mathbb{O}_i$ iç noktadır.

**İspat b:** Sonsuz tane açık kümenin kesişimi açık olmayabilir.

$$\mathbb{O}_n = \left(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{O}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{O}_n = \{0\} \text{ kapalı}$$

**İddia:** $\mathbb{O}_{i_1} \cap \mathbb{O}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbb{O}_{i_n}$ açıktır.

Herhangi $x \in \mathbb{O}_{i_1} \cap \mathbb{O}_{i_2} \cdots \cap \mathbb{O}_{i_n}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{O}_{i_1} \wedge \dots \wedge x \in \mathbb{O}_{i_n}$ $\qquad \mathbb{O}_{i_j}$ açık kümeler $j = 1, \dots, n$

$\exists \varepsilon_1 : B(x, \varepsilon_1) \subset \mathbb{O}_{i_1}$
$\exists \varepsilon_2 : B(x, \varepsilon_2) \subset \mathbb{O}_{i_2}$
$\vdots$
$\exists \varepsilon_n : B(x, \varepsilon_n) \subset \mathbb{O}_{i_n}$ $\qquad \exists \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$

$B(x,\varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_j) \subset \mathbb{O}_{i_j} \qquad j = (1, \dots, n)$

$\Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{O}_{i_1} \cap \dots \cap \mathbb{O}_{i_n}$

**İspat c:**

$(C_1 \cup \dots \cup C_n)^c = C_1^c \cap \dots \cap C_n^c$ açık $\Leftrightarrow C_1 \cup \dots \cup C_n$ kapalı

Sonsuz birleşim kapalı olmayabilir.

$C_n = [-n, n] \quad \bigcup_n \mathbb{O}_n = \mathbb{R}$ açık kapalı

$(-1,1)$ aralığının içindeki tüm kapalı kümeler için $\bigcup_{i \in I} C_i = (-1,1)$ açık

**İspat d:** $\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right)^c = \underbrace{\bigcup_{i \in I} \underbrace{C_i^c}_{\text{açık}}}_{\text{açık}} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ kapalı

**Örnek:** $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n} \right\} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) \cup \cdots$

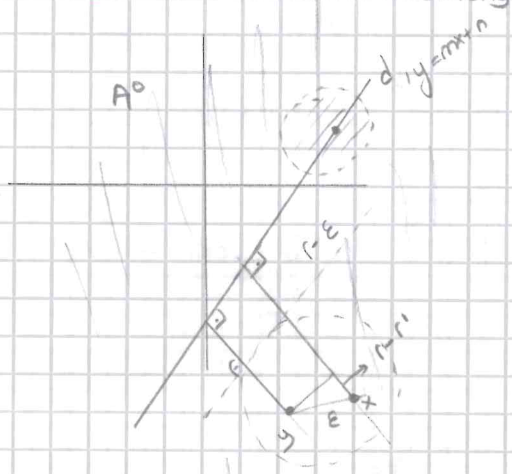
$A = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)}_{\text{açık}}}_{\text{açık}}$ açık küme

$\partial A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots \right\} \cup \{0\}$

**Lemma:** $\mathbb{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup (\mathring{A^c}) = \mathrm{Int}(A) \cup \partial(A) \cup \mathrm{Ext}(A)$

**Soru:** $\partial A = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(\underbrace{\mathrm{Ext}(A)}_{\text{açık}} \cup \underbrace{\mathrm{Int}(A)}_{\text{açık}})}_{\text{açık}} = (\mathrm{Ext}(A) \cup \mathrm{Int}(A))^c \rightarrow$ Kapalı

**Örnek:** $\mathbb{R}^2$'de alınan herhangi bir doğru kapalıdır.




$A : \{(x, y) : y = mx + n, \ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$A^\circ = \emptyset$

↳ doğrunun içine yuvar koyamayız.

$x \in A, \ \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$

Böyle bir yuvar bulunamaz.

$(\mathring{A^c}) = A^c$

$\vec{x} \in A^c$ noktasının $d$ doğrusuna uzaklığı $r$ olsun. $r > 0$

$\exists \varepsilon > r$ vardır $\ni$ $B(x, \varepsilon) \subset A^c$

$y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow y \in A^\circ$

$y$ doğrusuna olan uzaklığı $r' > r - \varepsilon$

$y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow \|y - x\| < \varepsilon$

$r' = \|y - d_1\| \leq \|y - x\| + \|x - d_1\|$

$d_1 \in A \qquad \leq \|y - x\| + \|x - d_2\| + \|d_2 - d_1\|$

$r' < \varepsilon + r + \|d_2 - d_1\|$

$(\mathring{A^c}) = \mathrm{Ext}(A) = A^c$

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A \cup \mathrm{Ext}\,A$

$= \emptyset \cup \partial A \cup A^c = A \cup A^c \Rightarrow \partial A = A$ Ayrıca $A^c$ açık $\Rightarrow A$ kapalı

**Teorem:** $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$\partial A \subset A$

$A$ kapalı olması için $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$

**İspat:** $(\Rightarrow)$ $A$ kapalı $\Rightarrow A^c$ açıktır.

$\Rightarrow Ext(A) = A^c$

$A \cup A^c = \mathbb{R}^n = Int A \cup \partial A \cup Ext(A) \Rightarrow A = Int A \cup \partial A \Rightarrow \partial A \subseteq A$

$(\Leftarrow)$ $\partial A \subseteq A \Rightarrow A$ kapalı

$\equiv A^c$ açıktır.

$\mathbb{R}^n = \underbrace{A^\circ \cup \partial A}_{A} \cup (A^{c})^\circ = A \cup A^{c\circ} = (A \cup A^c)$

$\left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \\ \partial A \subseteq A \end{array}\right\} = A^\circ \cup \partial A \subseteq A$

$\Rightarrow (A^c)^\circ = A^c$

$\Rightarrow A^c$ açık $\Rightarrow A$ kapalı

**Örnek:** $\mathbb{R}^n$'deki tüm eğriler kapalıdır.

$\rightarrow A = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^n$

$A = \underbrace{\underset{\text{Kapalı}}{\{x_1\}} \cup \underset{\text{Kapalı}}{\{x_2\}} \cup ... \cup \{x_n\}}$

Kapalı, Teoremden

**Tanım:** $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\exists \varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \supseteq A$ ise $A$ kümesine sınırlı küme denir.

**Örnek:** $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ $x = 0$ ve $\varepsilon = 3$ alalım. $B(0,3) = (-3,3) \supseteq A$ olduğundan $A$ sınırlıdır.

**Örnek:** Herhangi bir $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ alalım.

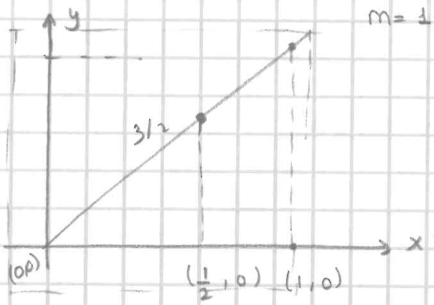
$\forall \varepsilon > 0$ için $\mathbb{Q} \cap B(x, \varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ kapalı değildir.

**Örnek:** $A = \left\{ \left( \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m,n \in \mathbb{N} \right\}$




$B_2 (0, 3/2) \supset A$

$B_\infty \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \frac{4}{6} \right) \supset A$

$A^\circ = \emptyset$ (?)

**Soru:** Sonsuz kapalı kumenin birlesimi kapalı mıdır?

Degildir. Karsıt örnek

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ \left( \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \right\}}_{\text{Kapalı}} =$ kapalı ?

$\partial A = A \cup \left\{ \left( \frac{1}{m}, 0 \right) : m \in \mathbb{N} \right\}$
$\cup \left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$
$\cup \{ (0,0) \}$

$\partial A \not\subset A \Rightarrow A$ Kapalı degil

**Tanım:** $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ bir küme o.ü. A'yı kapsayan kapalı kümelerin en kucuguna A'nın kapanısı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. $\bar{A} = \bigcap_{\substack{C \supset A \\ \text{Kapalı}}} C$

**Örnek:** $A = (0,1)$
$\bar{A} = [0,1]$

**Teorem:** A kapalı $\Longleftrightarrow \bar{A} = A$ , $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

**Tanım:** $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ o.ü. $\bar{A} = \mathbb{R}^n$ ise A'ya yoğun küme denir.

$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ hem kapalı, hem acık

A acık $\Longleftrightarrow A = A^\circ = Int(A)$
A kapalı $\Longleftrightarrow A^c$ acık
A kapalı $\Longleftrightarrow \partial A \subseteq A$

$\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$
A kapalı $\Longleftrightarrow \bar{A} = A$

$x \in Int(A)$ ic nokta : $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset A$
$x \in Ext(A)$ dıs nokta $\Longleftrightarrow x \in Int(A^c)$
$x \in \partial A$ sınır nokta $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$
$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\mathbb{R}^n = Int(A) \cup \partial A \cup Ext(A)$

# İç içe Aralık Özelliği: (Nested interval)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \subset \mathbb{R}$ kapalı bir aralık ve $\dots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset \dots \subset I_1$ koşulu sağlanıyor ise $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$

$I_n = [a_n, b_n]$

$$\underset{a_1}{[}\ \underset{a_2}{[}\ \underset{a_n}{[}\ \underset{a_{n+1}}{[}\ \dots\ \underset{b_{n+1}}{]}\ \underset{b_n}{]}\ \underset{b_2}{]}\ \underset{b_1}{]}\quad \mathbb{R}$$

$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $b_1$ ile üstten sınırlıdır.
$\mathbb{R}$ ekus özelliğine sahip olduğundan

$\sup A = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ vardır ve $\xi$ diyelim.

**iddia:** Her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi \le b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\xi \in [a_n, b_n]$ böylece

$\xi \in \bigcap_n [a_n, b_n]$ iddia sağlanmasın.

$\exists m \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $b_m < \xi \implies b_m$ elemanı $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A$ kümesinin üst sınırı değildir.

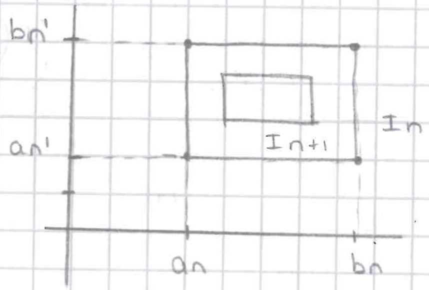
$\exists p \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $b_m \le a_p < \xi$

$q = \max\{m, p\}$, $a_m \le a_q < b_q \le b_m \le a_p$

$\implies a_q < a_p$ ↯

$\mathbb{R}^2$'de

$I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$




$I_n = [a_n, b_n] \times [a_n' \times b_n']$

$\cap \qquad \cap$

$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \times [a_{n+1}' \times b_{n+1}']$

$\cap \qquad \cap$ ~~küme~~ (kapalı)

$\vdots \qquad \vdots$

$\bigcap_n I_n \ni (\xi, \mu)$ öyle ki $\xi \in \bigcap_n [a_n, b_n]$, $\mu \in \bigcap_n [a_n', b_n']$

**Tanım:** $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ bir küme olmak üzere $x \in \mathbb{R}^n$ o.ü. $\forall \varepsilon > 0$ için

$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına

A kümesinin limit (yığılma noktası) deni.

$A' = \{A\text{'nın limit noktaları}\}$

**Örnek:** $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$

$0 \neq x_0 \in \mathbb{R} \setminus A \notin A'$

$x_0 \in A \notin A'$

$x_0 = 0$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$B(0,\varepsilon) \setminus \{0\} \cap A \neq \emptyset \qquad A' = \{0\}$

**Örnek:** $A = \{x \in [0,1]$ ve $x \in \mathbb{Q}\}$

$= [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$x \in [0,1] \quad , \forall \varepsilon > 0$

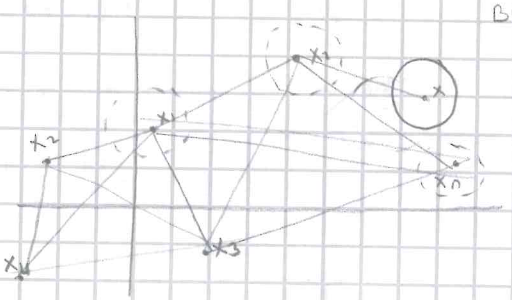
$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{0\}$ $\mathbb{R}$'nin arsimet özelliğinden

$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow A' = [0,1]$

**Örnek:** $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$

$A' = \emptyset \quad , r = \min\limits_{1 \le i,j \le n} \|x_i - x_j\| \qquad x \in A'$ o.ü. $\exists \varepsilon < r$ alırsak

$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$



$x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$

$r = \min\limits_{1 \le i \le n} \|x - x_i\|$

$\exists \varepsilon < r$ vardır $\ni$

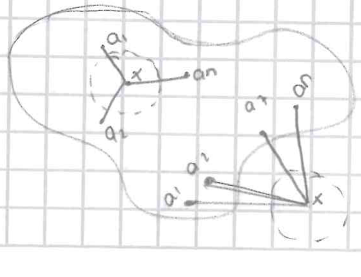
$(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow A' = \emptyset$

**Sonuç:** $x \in A'$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap \{x\}$ delinmiş komşuluğunda A kümesinden sonsuz tane eleman vardır.

**İspat:** $x \in A'$ ve $\exists \varepsilon > 0$ için $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \{$ sonlu tane nokta olsun. $\}$
$= \{a_1, \ldots, a_n\}$

$r = \min\limits_{1 \le i \le n} \|x - a_i\|$ Bir tane $\varepsilon' < r$ vardır $\ni$ $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin A'$ $\lightning$



**Örnek:** $\mathbb{N} = A$, $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$

$\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \Rightarrow \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \emptyset = \mathbb{N}$ kapalı

$\mathbb{N}' = \emptyset$

$B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$

anlamadım ?

$[|x|] < x < [|x|] + 1$

$r = \min\{x - [|x|], x - [|x|] + 1\}$

$\exists \varepsilon = r$, $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

**Teorem:** $A \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi olsun. A'nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $A' \subseteq A$

$\Rightarrow \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup A' \Leftarrow$

**İspat:** ($\Rightarrow$) A kapalı olsun.

$x \in A'$ ve $x \notin A$ olsun.

$x \notin A \Rightarrow x \in A^c$ ayrıca A kapalı olduğundan.

$x \in A^c = (\mathring{A^c}) = \text{Ext}\, A$

$\exists \varepsilon > 0$ vardır $\ni$ $B(x,\varepsilon) \subset A^c \Rightarrow B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \subset A^c$

$\Rightarrow B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin A'$ ↯

($\Leftarrow$) $A' \subseteq A$ olsun.

İddia: $A^c = (\mathring{A^c})$

$x \in A^c \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin A'$

$\exists \varepsilon > 0 \ni B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \subset A^c$ ($\because x \in A^c$)

$\Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset A^c$

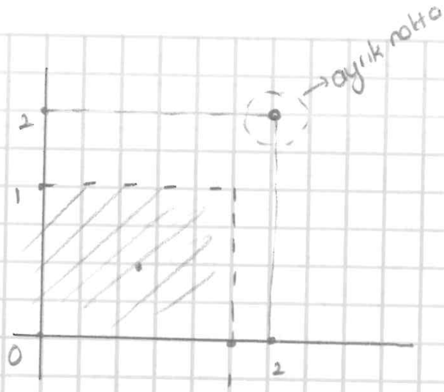
$\Rightarrow x \in \mathring{A^c}$

$\Rightarrow A^c = (\mathring{A^c})$

$\Rightarrow A^c$ = açık

$\Rightarrow A$ kapalı

**Örnek:**




$A' = A \setminus \{(2,2)\}$

$A = [0,1] \times [0,1] \cup \{(2,2)\}$

$A^{\circ} = (0,1) \times (0,1)$

$\partial A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = 1\} \cup$

$\{0 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \cup$

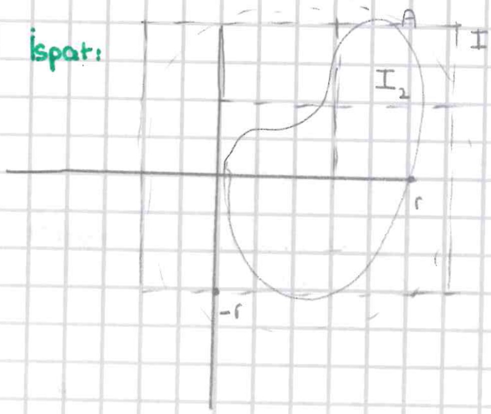
$\{0 \leq y \leq 1,\ x = 1\} \cup$

$\{0 \leq y \leq 1,\ x = 0\} \cup \{(2,2)\}$

**Bolzano - Weierstrass Teorem:**

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve sonsuz elemanlı bir alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

**İspat:**




$n = 2$ olsun.

A sınırlı olduğundan $\subset I = [-r,r] \times [-r,r]$

$I_1$'i 4 eşit parçaya bölelim.

Eğer 4 parçada sonlu eleman içerir ise A sonlu elemanlı $\lightning$

O zaman en az bir parça sonsuz tane A'nın elemanı içerir $I_2$

$(I_1 \supset I_2)$

$I_2$ 4 eşit parçaya bölünür ise o halde bu parçalardan biri sonsuz eleman içerir $I_3$ olsun.

$I_1 \supset I_2 \supset I_3$

$\vdots$

$I_n$ oluşturulabilir.

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$

İddia: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset \quad \exists \xi$ iç içe aralık özelliği

(?) İddia: $\xi \in A'$

$\forall \varepsilon > 0, \quad B(\xi, \varepsilon) \setminus \{\xi\} \cap A \neq \emptyset$

$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \xi \in I_n \quad \forall n \qquad \left( I_n\text{'in yarıçapı } \frac{r}{2^{n-1}} \right)$

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n \in \mathbb{N}$ öyle ki $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ olur. (Arsimet)

$\Rightarrow I_n \subset B(\xi, \varepsilon)$

$\Rightarrow B(\xi, \varepsilon) \setminus \{\xi\} \cap I_n \neq \emptyset$

$\Rightarrow B(\xi, \varepsilon) \setminus \{\xi\} \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \xi \in A'$

**Örnek:** $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \right\}$ sonsuz elemanlı

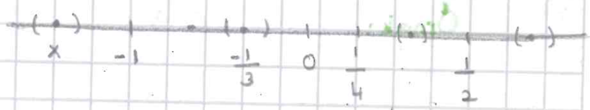
$A \subset B(0,2)$ sınırlı

$\Rightarrow$ B.W.T. bir tane yığılma noktası vardır.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ öyle ki $\forall n > N$ $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\} \cap A \neq \emptyset$;

$$\left( \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon \right) \Rightarrow 0 \in A'$$

$A^\circ = \emptyset$ $\quad x \in A$, $x = \frac{(-1)^n}{n}$ $\exists n$



$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$ irrasyoneller $\in B(x, \varepsilon)$ $\notin A$

$\Rightarrow A^\circ = \emptyset$

$\bar{A} = A \cup A' = A \cup \{0\} \neq A \Rightarrow$ kapalı değil $\qquad$ $A$ açık değil

① $x < -1$ veya $x > \frac{1}{2}$

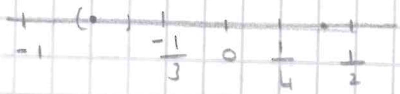
$r = |x+1|$ $\qquad \left| x - \frac{1}{2} \right| = r$

$\exists \varepsilon < r$ $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$

② $x \in A$ ise $x = a_n$, $r = |a_n - a_{n+1}|$

$\exists \varepsilon < r$ ; $B(a_n, \varepsilon) \setminus \{a_n\} \cap A = \emptyset$

③ $(-1, \frac{1}{2}) \setminus A \cup \{0\}$



$r = \min\{ |x - a_n|, |x - a_{n+1}| \}$

$\exists \varepsilon < r$ ~~$B(x, \varepsilon)$~~ $\cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$

Böylece $A' = \{0\}$

# Kompaktlık

! $(I, \leq)$ kısmi sıralı kümede her $i_1$ ve $i_2$ için $\exists i_3$ var; öyle ki $i_1 \leq i_3$ ve $i_2 \leq i_3$ koşulu sağlanıyor ise $I$'ya indis kümesi adı verilir.

$\{O_i\}_{i \in I}$ açık kümeler ailesi olsun. Yani $O_i$'leri hepsi açık küme $\forall i \in I$

**Tanım:** $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $A$'nın **her** açık örtüsünün sonlu açık örtüsü $A$'yı kapsıyor ise $A$ kümesine kompakt küme denir.

**Örnek:** $\mathbb{N}$ bir alt örtüsü

Önemli

$$\left\{\left(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}} = \{O_n\} \qquad \exists n_1, n_2, \dots, n_k \ni \mathbb{N} \subset O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_{n_k}$$

açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü yoktur ki $\mathbb{N}$'yi kapsasın. O halde $\mathbb{N}$ kompakt değildir.

**Örnek:** $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ $\forall r \in \mathbb{R}_+$ için $\{B(x_i, r)\}_{i=1}^{n}$

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r) \quad \text{kompakt}$$

**Örnek:** $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$ $\qquad O_n = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \qquad A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$

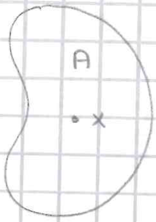
$\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesinin $A$'yı kapsayan sonlu tane alt örtüsü yoktur.

A kompakt değildir.

**Teorem:** A kompakt $\Rightarrow$ A sınırlı ve kapalı.
$\Leftarrow$ Heine-Borel $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\dim V < +\infty$
Teorem

**İspat:** A kompakt olsun.

1.) A sınırlıdır.




Fix $x \in A$ olsun.

$\{B(x, n)\}_{n=1}^{\infty}$ $A$'nın açık örtüsüdür. A kompakt olduğundan sonlu tane $B(x,n)$'ler ile kapsanır.

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x, n_i) \subset B(x, n_k)$$

$\Rightarrow$ A sınırlıdır.

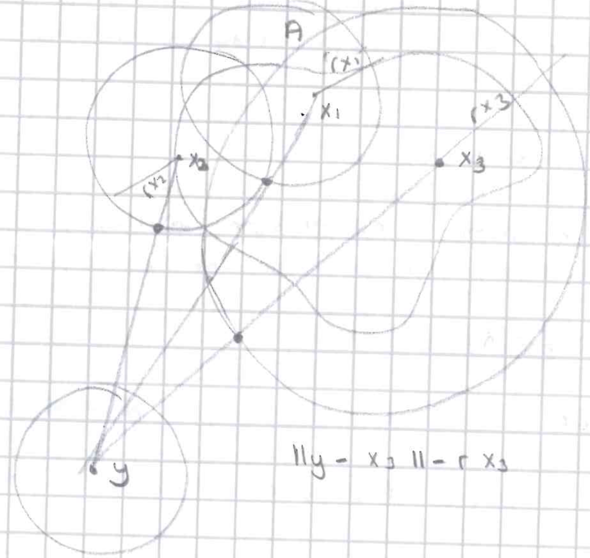
2.) A kapalı $\equiv$ $A^c$ açık

$\{B(x_i, r(x_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ açık örtü   A kompakt olduğundan

$\{B(x_1, r(x_1)), \ldots, B(x_n, r(x_n))\}$ sonlu alt örtüsü A'yı kapsar.

İddia: $A^c$ kümesinin her y elemanı $A^c$ nin iç noktasıdır.

$\exists r > \varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subset A^c \Rightarrow y \in \mathring{A}^c \Rightarrow \mathring{A}^c = A^c \Rightarrow A$ kapalı



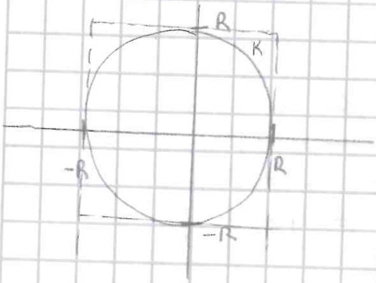

$\|y - x_3\| - r\,x_3$

$r = \min_{i=1,\ldots,n} \{\|y - x_i\| - r(x_i)\}$

**Heine-Borel Teoremi**

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$'de kapalı ve sınırlı bir küme kompakttır.

**İspat** K kapalı ve sınırlı olsun.




K sınırlı olduğundan $\exists R \in \mathbb{R}_+$ vardır öyle ki $K \subset B(0,R)$

$K \subset I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R \wedge |y| \leq R\}$

K kompakt olmasın. En az bir tane açık örtüsü $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ vardır öyle ki hiçbir sonlu alt örtüsü K'yı kapsamaz.

$I_1$ 4 eşit parçaya bölünsün. 4 parçadan en az biri $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsünün hiçbir sonlu alt örtüsü ile örtülemez.

$I_2$ bu özelliği sağlayan aralık olsun. $I_2$ 4 eşit parçaya bölünsün ve $I_3$, $I_2$'nin $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsünün sonlu tane alt örtü ile kapsayamadığı aralık olsun.

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ Tümevarımla $I_n$ aralığı bulunur.

İç içe aralık özelliğinden $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Ayrıca $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$ kümesi $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtüsünün hiçbir sonlu alt örtüsü tarafından örtülemez.

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ olsun.

$\Rightarrow x \in K' \xRightarrow{K \text{ kapalı}} x \in K$

$\forall \varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap K \neq \emptyset$ $\quad \exists \varepsilon > 0$ için $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset B(x,\varepsilon) \subset Q_{x_0}$ ↯

**Teorem:** $\mathbb{R}^n$'de $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) $A$ kompakt
(ii) $A$ kapalı ve sınırlı
(iii) $A$'nın sonsuz elemanlı her alt kümesi $A$'da yığılma noktasına sahiptir.
$\equiv$ $K \subset A$ sonsuz elemanlı alt kümesi olsun. $K$ yığılma noktasına sahiptir $\in A$

Bu koşullar denktir.

**İspat: (i $\Leftrightarrow$ ii)** Heine - Borel teoreminden

**(ii $\Rightarrow$ iii)** $K$ sonsuz elemanlı bir küme $K \subset A$ alt küme ve $A$ sınırlı
$K$ sınırlıdır. Bolzano - Weierstrass teoreminden $K$'nın en az bir tane yığılma noktası vardır.

$$K \subset A \Rightarrow \bar{K} \subseteq \bar{A}$$
$$x \in K' \subset \bar{K} \subseteq \bar{A} = A$$
$$\Rightarrow x \in A$$

**Örnek:** $K \subset A \Rightarrow \bar{K} \subset \bar{A} = A$
$\neq$

$A = [0,1] \quad K = \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad \bar{K} = A$

**(iii $\Rightarrow$ ii)** $A$ sınırlıdır.
$A$ sınırlı olmasın.
$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\exists x_n \in A$ vardır. $\exists$ $\|x_n\| > n$ olur.

$K = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset A$ kabulden $\exists y \in K'$ ve $y \in A$'dır.

$n \cdot 1 > 1 + \|y\|$ olsun
(Arsimet özelliğinden)

$\|x_n - y\| \geq \|x_n\| - \|y\| > n - \|y\| > 1$ $\quad$ Eğer $\varepsilon < 1$ ise

$B(y,\varepsilon) \setminus \{y\} \cap K = \emptyset$
$\Rightarrow y \notin K'$ ↯

$A$ kapalıdır.
$x \in A'$ olsun $\quad$ iddia: $x \in A$
$\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$

$x_1 \in B(x,1) \setminus \{x\} \cap A$
$x_2 \in B(x,\frac{1}{2}) \setminus \{x\} \cap A$
$\vdots$
$x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \setminus \{x\} \cap A$
$\vdots$

Lemma!

$K = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset A$ Kabul eden $\exists y \in K'$ ve $y \in A$ $y \neq x$ Lemma olsun?

$y \neq x$ olsun.

$$0 < \|y-x\| \leq \|y-x_n\| + \|x_n - x\| \leq \|y-x_n\| + \frac{1}{n}$$

$\frac{\|y-x\|}{2} \in \mathbb{R}^+$ ve $1 \in \mathbb{R}$ olsun. Arsimet özelliğinden $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$n_0 \cdot \frac{\|y-x\|}{2} > 1 \Rightarrow \frac{\|y-x\|}{2} > \frac{1}{n_0}$$

$$\|y-x\| > \frac{\|y-x\|}{2} > \frac{1}{n_0}$$ $\forall n > n_0$ olmak üzere

$$\|y-x\| > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \|y-x\| \leq \|y-x_n\| + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \|y-x_n\| > \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} = \varepsilon$$ olsun.

$\exists \varepsilon > 0$ vardır öyle ki $B(y,\varepsilon) \setminus \{y\} \cap K = \emptyset \Rightarrow y \notin K'$ ?

## Bağlantılılık

**Tanım:** $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ bir alt küme olmak üzere $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümeleri olsun. $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$ $A \cap B = \emptyset$ ve $(S \cap A) \cup (S \cap B) = S$ koşulu sağlanıyor ise $S$'ye bağlantısız küme denir.

Bağlantısız olmayan kümelere bağlantılı küme denir.

**Örnek:** $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \text{ ve } x \neq 0\}$ Hoca!

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ açık kümeler
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \wedge y > 0\}$

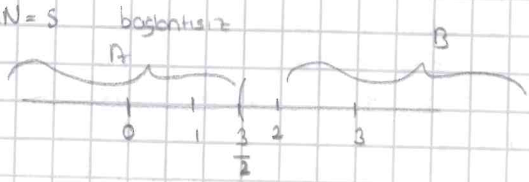
$A \cap B = \emptyset$

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = S$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$

Bağlantılı

**Örnek:** $\mathbb{N} = S$ bağlantısız



$A = (-\infty, \frac{3}{2})$ $B = (\frac{3}{2}, \infty)$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$ $B \cap \mathbb{N} = \{2, \dots\}$

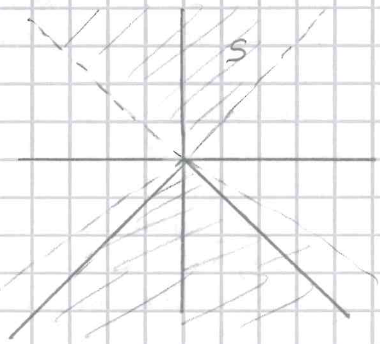
$(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap \mathbb{N}) = \mathbb{N}$

**Lema:** S bağlantılı $\Rightarrow$ $S^c$ bağlantısızdır.

**Teorem:** $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ alt kümesi olsun.

S bağlantılı $\Leftrightarrow$ S'nin aralık olmasıdır.

→ Sadece $\mathbb{R}$'de olduğunu bir örnekle açıklayalım. ve Lemaya da örnek.

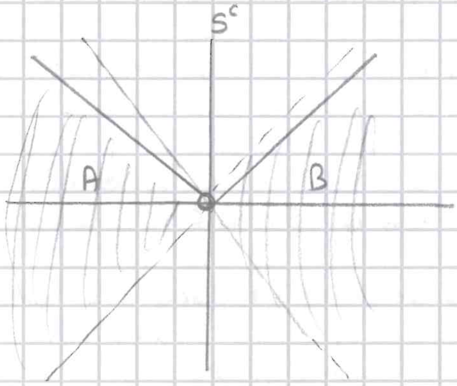



$$S = \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}}_{A} \cup \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -|x|\}}_{B}$$

$A \cap B = \emptyset$

$S = A \cup B$ ama $B^\circ \neq B$

Öyle bir B açık küme yoktur ki
(sıfırı kaybederiz.)
$A \cap B = \emptyset$ olsun.
Bağlantılı




$A \cap B = \emptyset$ $\quad S^c \cap A \neq \emptyset$

$S^c \cap B \neq \emptyset$

$(S^c \cap A) \cup (S^c \cap B) = S^c$ bağlantısız

**İspat:** $(\Leftarrow:)$ S aralık $\Rightarrow$ S bağlantılıdır.
S bağlantısız $\Rightarrow$ S aralık değil

$a < b$ kabul edelim ve $[a,b] \subset S$ olsun.

S bağlantısız olduğundan $[a,b] \cap A \neq \emptyset$

$\forall x \in [a,b] \cap A$ için $x \leq b$ olur. $(x \leq b' , b' \in B)$

$[a,b] \cap A$ kümesi üstten sınırlı ise supremumu vardır.

$\sup\{[a,b] \cap A\} = c$ olsun

Eğer $c \in B$ ise ve $B = B^\circ$ olduğundan $c \in B^\circ$ iç noktadır.

$\exists \varepsilon > 0 : B(c,\varepsilon) = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset B$
$c - \varepsilon < c \in B$

Eğer $b' = c - \varepsilon$ alınırsa $c - \varepsilon$'da $[a,b] \cap A$ kümesinin üst sınırıdır. $\sup [a,b] \cap A \neq c$ ?

$\exists a' \in A$ vardır $\ni$ $c - \varepsilon < a' < c$

$c \notin B \Leftarrow S$ bağlantısız $\Leftarrow$ $A \cap B = \emptyset \Leftarrow [c-\varepsilon, c] \cap B \neq \emptyset$

$[c-\varepsilon, c] \cap A \neq \emptyset$

$c \notin B \Rightarrow c \in A$'dır.

$A = A^\circ \Rightarrow c \in A^\circ$

$\exists \varepsilon' > 0 \ni B(c, \varepsilon') \subset A$ $\quad$ c, A'nın üst sınırı olduğundan →← elde edilir.

$\Rightarrow c \notin A$

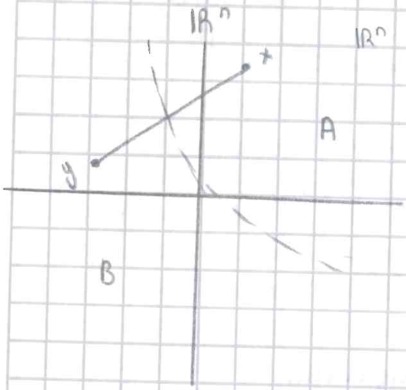
$\Rightarrow$ S aralık olamaz!

($\Leftarrow$) S bağlantılı $\Rightarrow$ S aralıktır.

S aralık olmasın. $\exists c \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $c \notin S$ olur.

$A = (-\infty, c)$ ve $B = (c, \infty)$ $\Rightarrow$ S bağlantısız →←

**Soru:** $\mathbb{R}^n$ bağlantılıdır. Gösteriniz.




$\mathbb{R}^n$ bağlantısız olsun.

$\emptyset \neq A$ ve $\emptyset = B$ olsun. A ve B açık

$A \cap B = \emptyset$

$\mathbb{R}^n \cap A \neq \emptyset$ ve $\mathbb{R}^n \cap B \neq \emptyset$

$(\mathbb{R}^n \cap A) \cup (\mathbb{R}^n \cap B) = \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $[0,1] \to \mathbb{R}^n$

$t \mapsto (y-x) \cdot t + x$ $\qquad$ $t \mapsto (y-x) \cdot t + x$

$S = \{ x + t(y-x) : t \in [0,1] \}$

$S \cap A \neq \emptyset$ ve $S \cap B \neq \emptyset$

$A_1 = \{ t \in [0,1] : x + t(y-x) \in A \}$

$A_2 = \{ t \in [0,1] : x + t(y-x) \in B \}$

$A_1 \cup B_1 = [0,1]$

? $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ $\qquad$ $A_1$ ve $B_1$ açık old. gösterilirse $[0,1]$ bağlantılıdır.

$A_1$ açıktır.

Herhangi $t_1 \in A_1$ için bir tane $a_1 = x + t_1(y-x) \in A$'dır. A açık olduğundan $a_1$ iç nokta.

$\exists \varepsilon > 0 \ni B(a, \varepsilon) \subset A$ $\quad$ $\|a - a_1\| < \varepsilon$ $\forall a \in B(a_1, \varepsilon)$

$\Rightarrow \|x + t(y-x) - (x + t_1(y-x))\|$

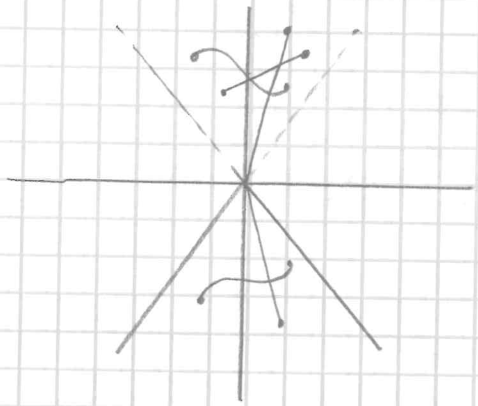
$\Rightarrow \|(t - t_1) \cdot (y-x)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow |t - t_1| < \dfrac{\varepsilon}{\|y-x\|} = \varepsilon'$

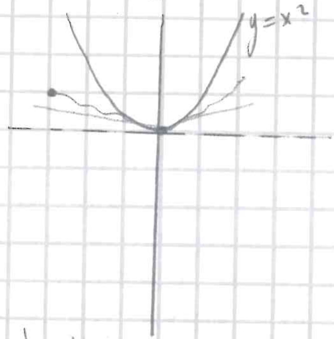
$\Rightarrow \exists \varepsilon' > 0$ , $B(t_1, \varepsilon') \subset A \Rightarrow A_1$ açık. Böylece $\mathbb{R}^n$ bağlantılıdır.

## Yol Bağlantılılık

S kümesindeki herhangi iki nokta bir yol ile birbirine bağlanıyor ve yol tamamen S içinde kalıyor ise S kümesine yol bağlantılı denir.



→ Yol Bağlantılı
→ poligon bağlantılı




bağlantılı - yol bağlantılı
poligon bağlantılı değil

**Poligon Bağlantılılık:** S kümesindeki herhangi iki nokta sonlu tane doğru parçası ile birbirine bağlanıyor ve bu parçalar S'de kalıyor ise S poligon bağlantılıdır.

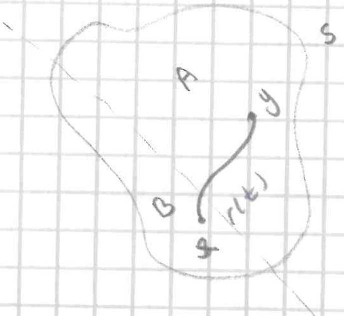

Poligon Bağlantılı $\Rightarrow$ Yol Bağlantılı $\Rightarrow$ Bağlantılı
$\not\Leftarrow$ $\Leftarrow$ (S açık)

**Ödev:** $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0\} \cup \{(x,y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$

Bağlantılı fakat yol b. değil ?

Barte

**İspat:** S yol bağlantılı ama bağlantısız olsun. $A, B$ açık $A \cap B = \emptyset$
$S \cap A \neq \emptyset$ , $S \cap B \neq \emptyset$
$(S \cap A) \cup (S \cap B) = S$




$r: [a,b] \to S$
$t \mapsto r(t)$ $r(a) = x$ $r(b) = y$

$A_1 = \{t \in [a,b] ; r(t) \in A\}$ açık
$B_1 = \{t \in [a,b] : r(t) \in B\}$ açık

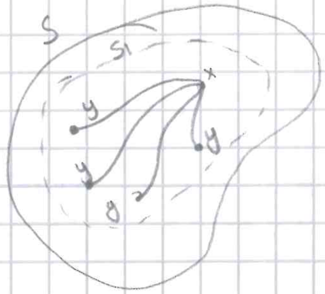
$A_1 \cap B_1 = \emptyset$ $A_1 \cup B_1 = [a,b]$

bağlantılı

$\Rightarrow$ S bağlantılı

**İspat:** S kümesi açık ve bağlantılı $\Rightarrow$ Yol Bağlantılıdır.

$S^\circ \neq S$, bağlantılı ve yol bağlantısız olsun.




Fix $x \in S$ alalım. $x$ ile yol bağlantılı olan $S$'nin tüm noktaların kümesi $S_1$ olsun. $x \in S_1 \neq \emptyset$

$y \in S_1$ olsun. $y \in \overset{\circ}{S_1}$

$y \in S_1 \Rightarrow y \in S = S^\circ$ $\exists \varepsilon > 0$ $\ni$ $B(y,\varepsilon) \subset S$ $B(y,\varepsilon)$

yol bağlantılı Herhangi $z \in B(y,\varepsilon)$ için $z \longrightarrow y \longrightarrow x$

$\Rightarrow z \longrightarrow x$ $B(y,\varepsilon) \subset S_1$

$\Rightarrow y \in \overset{\circ}{S_1} \Rightarrow S_1$ açık

$S \setminus S_1$ kümesini düşünelim.

$S \setminus S_1 = \{ s \in S : s$ ile $x$ bir yol bağlantılı değil$\}$

$s \in S \setminus S_1 \subset S = S^\circ \Rightarrow s \in S^\circ$

$\exists \varepsilon > 0$, $B(s,\varepsilon) \subset S$ Her $z \in B(s,\varepsilon)$ ile $s$ yol bağlantılıdır. Ama $s$ ile $x$ bağlantılı değil

$\Rightarrow z$ ler $x$ ile bağlantılı değil

$\Rightarrow B(s,\varepsilon) \subset S \setminus S_1$

$\Rightarrow s \in S^\circ \setminus S_1 \Rightarrow S \setminus S_1$ açık

$S_1$, $S \setminus S_1$ açık, $S_1 \cap (S \setminus S_1) = \emptyset$

$S_1 \cup (S \setminus S_1) = S \Rightarrow S$ bağlantısız $\rightarrow\bullet\leftarrow$

**Diziler:**

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ fonksiyonuna dizi denir. $f(n) = a_n$ şeklinde gösterilir.

$f(n) = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_k^n) = a_n$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)$, $a_n$ dizisi

yazılır. $a_1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1)$ $a_i^n \in \mathbb{R}$

$a_2 = (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_k^2)$ $i = 1, \ldots, k$

$\vdots$

**Örnek:** $(a_n) = \left( \dfrac{(-1)^n}{n}, \sin n, \tan^{-1} n \right)$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$a_5 = \left( \dfrac{-1}{5}, \sin 5, \tan^{-1} 5 \right)$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$n \longmapsto (f_1(n), f_2(n), f_3(n))$ yakınsaktır

$(f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ Her bileşenin limiti vardır (yakınsaktır)

$$\lim_{n\to\infty} f_1(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_2(n) = \lim_{n\to\infty} \sin n = \text{yok}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_3(n) = \lim_{n\to\infty} \tan n = \frac{\pi}{2}$$

**Teorem:** Bir dizinin limiti varsa tektir.

**İspat:** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$
$n \longmapsto a_n = (a_n^1, \ldots, a_n^k)$ limiti var olsun.

$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim f(n) = \lim a_n = L$ ve $\lim a_n = K$ olsun.

$K \neq L$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall n > N_1$ için $\|a_n - L\|_p < \varepsilon/2$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall n > N_2$ için $\|a_n - K\|_p < \varepsilon/2$

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists N = \max\{N_1, N_2\}$ $\ni$ $\forall n > N$ için

$$\|L - K\| \leq \|L - a_n\| + \|a_n - K\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow L = K$$

**Teorem:** $(a_n) \subset \mathbb{R}^k$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her bileşeninin yakınsak olmasıdır.

$$a_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k) \longrightarrow L = (L^1, L^2, \ldots, L^k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i = 1, \ldots, k \quad \lim_{n\to\infty} a_n^i = L^i$$

**İspat:** $(\Rightarrow)$ $\lim a_n = L$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için, $\exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n > N$ için

$$\|a_n - L\|_\infty < \varepsilon$$

$$\|a_n - L\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,k} |a_n^i - L^i| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\forall i = 1, \ldots, k$ için

$$|a_n^i - L^i| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n^i = L^i$$

$(\Leftarrow)$ Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists N_1 \in \mathbb{N} \ni \forall n > N_1$ için $|a_n^1 - L^1| < \varepsilon/k$

$\exists N_2 \in \mathbb{N} \ni \forall n > N_2$ için $|a_n^2 - L^2| < \varepsilon/k$

$\vdots$

$\exists N_k \in \mathbb{N} \ni \forall n > N_k$ için $|a_n^k - L^k| < \varepsilon/k$

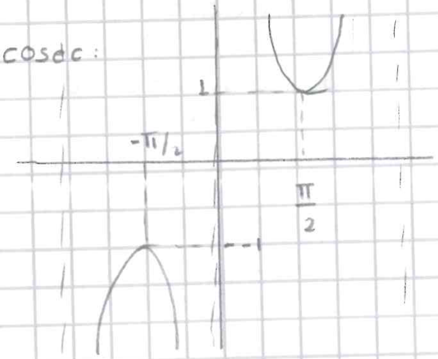
Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = \max_{i=1,\dots,k} \{N_i\}$ seçelim $\ni$ $\forall n > N$ iken $\|a_n - L\|_1 < \varepsilon$

$$\|a_n - L\|_1 = |a_n^1 - L^1| + |a_n^2 - L^2| + \dots + |a_n^k - L^k| < \varepsilon$$

**Örnek:** $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^4$

$$n \longmapsto \left( \frac{\ln n}{2^n}, \tanh^{-1}(\ln(n+1)), \frac{\sin n}{n}, \text{arccosec}\, n \right)$$

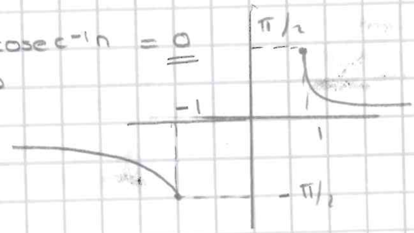
$\to$ cosec:



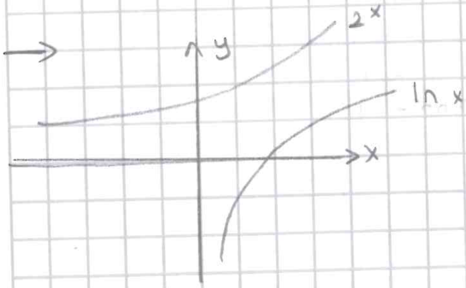
$\text{cosec}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1,1]$

$\xleftarrow{\quad}$ arccosec x

$$\lim_{n\to\infty} \text{cosec}^{-1} n = \underline{\underline{0}}$$



$\to$



$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{0} \le \overset{=0}{\frac{\sin n}{n}} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \quad \to \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \underline{0}$$

$\to$ $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} =$ $\quad D(\tanh) = \mathbb{R}$ $\quad \tanh(\ln(n+1)) = \frac{e^{\ln(n+1)} - e^{-\ln(n+1)}}{e^{\ln(n+1)} + e^{\ln(n+1)}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tanh(\ln(n+1)) = 1$$

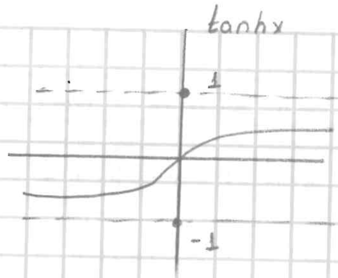
$y = \tanh^{-1} x$

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \quad 0 = x - \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Rightarrow \frac{x \cdot e^{2y} + x - e^{2y} + 1}{e^{2y} + 1} = 0 \Rightarrow e^{2y} = \left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

$$2y = \ln \left|\frac{x+1}{1-x}\right| \quad y = \ln \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{1/2} = \tanh^{-1} x$$

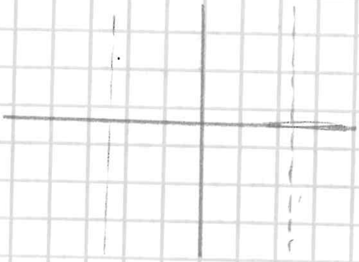
$$\tanh^{-1}(\ln(n+1)) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\ln(n+1) + 1}{1 - \ln(n+1)}\right) \quad \lim_{n\to\infty} \tanh^{-1}(\ln(n+1)) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) + 1}{1 + \ln(n+1)} \right|$$




$\tanh^{-1}(\ln(n+1))$ fonk. tanımsızdır.

$n \in \mathbb{N}$ için.



**Tanım:** $(a_n)$ dizisinin $k_n$ kuralına göre seçilerek oluşturulan $(a_{k_n})$ dizisine $a_n$'in alt dizisi denir.

$(a_{2n}), (a_{2n+1}), (a_{3n+2})$

$a_n$ yakınsak $\Rightarrow$ alt diziler yakınsak

$a_n \to L \Rightarrow a_{k_n} \to L$

$\not\Leftarrow \quad (-1)^n$

**Teorem;** $(a_n) = (a_{k_n}) \cup (a_{l_n}) \cup (a_{m_n})$ olsun. Eğer;

$$\left.\begin{array}{l} a_{k_n} \to L \\ a_{l_n} \to L \\ a_{m_n} \to L \end{array}\right. \Rightarrow a_n \to L$$

**Örnek:** $\frac{(-1)^n}{n}$ $a_n$

$a_n = (-1, 1/2, -1/3, 1/4, \dots)$

$a_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \to 0 \qquad a_{2n} = \frac{1}{2n} \to 0 \quad \Rightarrow a_n \to 0$

**Örnek:**

$$a_n = \begin{cases} \operatorname{cosec}^{-1} n, & n = 3k \\ \sin n / n, & n = 3k+1 \\ 1/n, & n = 3k+2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{3k} = \operatorname{cosec}^{-1}(3k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ a_{3k+1} = \frac{\sin(3k+1)}{3k+1} \to 0 \\ a_{3k+2} = \frac{1}{3k+2} \to 0 \end{array}\right\} a_n \to 0$$

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$

$\mathcal{L} = \{$ Tüm alt dizilerinin limitlerinin kümesi $\}$

$\sup \mathcal{L} = \limsup a_n$ $\qquad$ $a_n \to L$ yakınsak $\Leftrightarrow \mathcal{L} = \{L\}$

$\inf \mathcal{L} = \liminf a_n$ $\qquad$ $\sup \mathcal{L} = \inf \mathcal{L} = L = \lim a_n$

$L = \lim a_n \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n$

$\liminf a_n \leq \limsup a_n$

**Örnek:** $(-1)^n = a_n$ $\quad \mathcal{L} = \{-1, 1\}$ $\quad \liminf a_n = \inf \mathcal{L} = -1$

$\limsup a_n = \sup \mathcal{L} = 1$ $\Rightarrow$ lim yok.

dizi yakınsak değil ıraksal.

**Örnek:** $a_n = \left((-1)^n, \frac{\sin n}{n}\right)$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$

$\lim a_n =$ yok $\quad \limsup(a_n) = (1, 0) \quad \liminf(a_n) = (-1, 0)$

$a_n = ((-1)^n, (-1)^{n+1})$

$a = 2k$

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ $\quad a_{2k} = ((-1)^{2k}, (-1)^{2k+1}) = (1, -1)$

$x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$

$n = 2k+1,$ $\quad a_{2k+1} = ((-1)^{2k+1}, (-1)^{2k+2}) = (-1, 1)$

$\mathcal{L} = \{(-1, 1), (1, -1)\}$

**Cauchy Dizisi:**

$(x_n) \subset \mathbb{R}^k$ Cauchy dizisidir. eğer $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > N$ iken

$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

**Teorem:** $(x_n)$ yakınsak $\Rightarrow$ Cauchy

**İspat:** $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n > N$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = N'$ seçelim. $\forall n > m > N$ için

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \Rightarrow (x_n) \text{ Cauchy}$$

**Teorem:** Her Cauchy yakınsaktır. $(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^k)$

**İspat:** $(x_n) \subset \mathbb{R}^k$ Cauchy olsun.

$x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \ldots, x_n^k)$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n > m > N$ için

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$$

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,k} |x_n^i - x_m^i| < \varepsilon \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, k$$

$|x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n^i) \subset \mathbb{R}$ Cauchy

$\Leftrightarrow (x_n^i)$ yakınsak $\forall i = 1, \ldots, k$

$\Leftrightarrow (x_n)$ yakınsak

**Örnek:** $C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{sürekli} \}$ $\quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

normlu uzay mıdır?

$$|f(x)| \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx \geq 0 \Rightarrow \|f\|_1 \geq 0$$

1.) $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 0 \iff |f(x)| = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \iff f = 0$

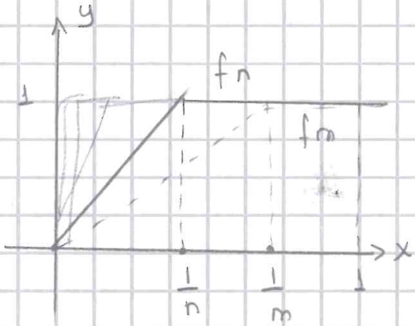
2.) $\|a \cdot f\|_1 = \int_0^1 |a \cdot f(x)|\,dx = |a| \cdot \int_0^1 |f(x)|\,dx = |a| \cdot \|f\|_1$

3.) $\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)\,dx$
$= \|f\|_1 + \|g\|_1$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x < 1/n \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$n > m$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$




Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \ni$
$\forall n > m > N$ iken
$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))\,dx = \int_0^{1/n} (nx - mx)\,dx + \int_{1/n}^{1/m} (1 - mx)\,dx$$

$$= \frac{(n-m)}{2} \cdot x^2 \Big|_0^{1/n} + \left(x - \frac{mx^2}{2}\right) \Big|_{1/n}^{1/m}$$

$$= \frac{n-m}{2n^2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{m}{2n^2}\right)$$

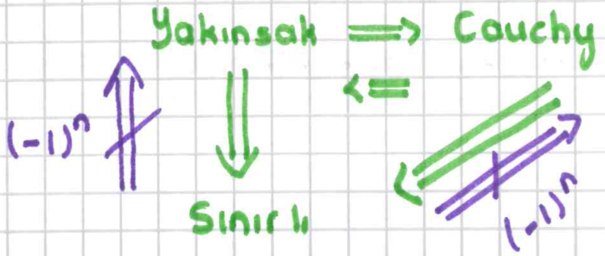
$$= \frac{n-m}{2n^2} + \frac{1}{2m} - \left(\frac{2n-m}{2n^2}\right) = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2m}$$

$$\frac{1}{m} < 2\varepsilon \Rightarrow \left[\!\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]\!\right] < m$$

$f_n \to f(x)$

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Cauchy ⇒ Sınırlı




**Lemma:** Cauchy ⟹ sınırlıdır.

**İspat:** Verilen $\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>m>N$ için $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$

$\Rightarrow \|x_n - x_{N+1}\|<\varepsilon$

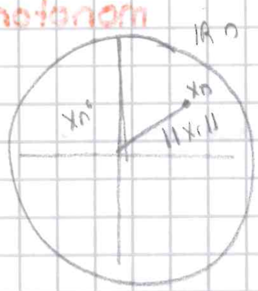
$\Rightarrow \|x_n\| - \|x_{N+1}\|<\varepsilon$

(?) $\Rightarrow \|x_n\| < \|x_{N+1}\|+\varepsilon$ $\forall n>N$

$\exists M\in\mathbb{R}_+ : (x_n)\subset B(0,M)$

$\forall n>N$ için $\|x_n\| < \varepsilon + \|x_{N+1}\|$

$M=\max(\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_N\|, \|x_{N+1}\|+\varepsilon) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$ için $\|x_n\|<M$




⟹ dizi sınırlıdır.

**Bolzano - Weierstrass Teoremi:** Sınırlı bir dizinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır.

**Örnek:** $(-1)^n=(a_n)\subset\mathbb{R}$ sınırlı bir dizi

$a_{2k}\to 1$

$a_{2k+1}\to -1$

**B.W.T:** A sonsuz elemanlı sınırlı bir kümenin en az bir yığılma noktası vardır ($\exists c\in A'$)

$A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ sonsuz elemanlı - sınırlı

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

$n\mapsto \{a_n\}=A=f(\mathbb{N})$

$f(\mathbb{N})=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\}$

Bazı $n$'ler için $a_n = \alpha_1 \to \alpha_1$ en az bir alt dizi yazılır öyle ki
$a_n = \alpha_2 \to \alpha_2$ $\alpha$'ile yakınsar.

$\vdots$

$a_n = \alpha_n \to$

Eğer $f(\mathbb{N})$ sonlu değil ise B.W.?'den $\exists c \in A' = (f(\mathbb{N}))'$ vardır.

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$

$a_{k_1} \in B(c, 1) \setminus \{c\} \cap A \neq \emptyset$

$a_{k_2} \in B(c, \frac{1}{2}) \setminus \{c\} \cap A \neq \emptyset$

$\vdots$

$a_{k_n} \in B(c, \frac{1}{n}) \setminus \{c\} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow (a_{k_n})$ alt dizisi vardır $\ni$ $a_{k_n} \to c$, $n \to \infty$

Yakınsak $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow$ Sınırlı

$\Leftarrow$ ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$) $\quad \not\Leftarrow$ $(-1)^n$

**Lemma:** $(a_n) \subset \mathbb{R}$ o.ü.

sınırlı + monoton $\Rightarrow$ Yakınsaktır.

**Lemma:** ~~$(a_n) \subset \mathbb{R}^k$ o.ü. sınırlı + monoton $\Rightarrow$ Yakınsaktır.~~

$\mathbb{R}^k$'da sıralama? monoton?

**Lemma:** $(a_n) \subset \mathbb{R}^k$ o.ü. sınırlı + en az bir yakınsak alt dizisi var ise yakınsaktır.

Yanlış. $(-1)^n$

**Lemma:** $\mathbb{R}$'de

$(a_n b_n)$ yakınsak, $b_n$ pozitif ve sınırlı bir dizi ise

$a_n$ ~~yakınsaktır~~

Yanlış. $a_n = (-1)^n$ $b_n = \frac{1}{n}$, $0 \le b_n \le 1$ sınırlı

$(a_n b_n) = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$

ama $a_n$ yakınsak değil

dizinin en az bir tane yakınsak alt dizisi vardır.

Yanlış. $(a_n) = n$ $(b_n) = \frac{1}{n}$ $(a_n b_n) = 1 \to 1$ yakınsak

$0 \le b_n \le 1$ sınırlı

$(a_n)$'in hiçbir alt dizisi yakınsak değildir.

**Doğrusu;**

**Örnek:** $(a_n b_n)$ yakınsak ve $1 \leq b_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ koşulları sağlansın. $(a_n)$'in en az bir tane yakınsak alt dizisi vardır.

**İspat:** $(a_n b_n)$ yakınsak $\Rightarrow$ sınırlı

$$\exists m, M \in \mathbb{R}^+ \ni m \leq |a_n b_n| \leq M \Rightarrow \frac{m}{b_n} < |a_n| < \frac{M}{b_n}$$

$$1 \leq b_n \leq 2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{b_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} < |a_n| < M \Rightarrow (a_n) \text{ sınırlı}$$

**Teorem:** $A \subseteq \mathbb{R}^k$ olsun.

$$x \in \bar{A} \iff \exists (a_n) \subset A \ni \lim a_n = x$$

( $A$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in A$ için $\exists (a_n) \subset A$ $\ni a_n \to a$

**İspat:** $(\Rightarrow)$ $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\varepsilon = 1$ ise $a_1 \in B(x, 1) \cap A \neq \emptyset$
$a_2 \in B(x, 1/2) \cap A \neq \emptyset$
$\vdots$
$a_n \in B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ $\Rightarrow \exists (a_n) \subset A$ ve ayrıca $\|a_n - x\| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim a_n = x$

$(\Leftarrow)$ $\exists (a_n) \subset A \ni \lim\limits_{n \to \infty} a_n = x$ 'li

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \ni \forall n > N$ iken $\|a_n - x\| < \varepsilon$

(?) $\forall n > N$ için $a_n \in B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$
$\Rightarrow x \in A' \subset \bar{A}$
$\Rightarrow x \in \bar{A}$

Teamwiever

**Teorem:** $A \subset \mathbb{R}^n$ o.ü.

A kompakt $\iff$ A'dan alınan her $(a_n)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. :kesinlikle

:örnek

$(\Rightarrow)$

**İspat:** A kompakt $\Rightarrow$ A sınırlıdır.
$\Rightarrow (a_n) \subset A$ sınırlı
$\Rightarrow$ B.W.T.'den $\exists (a_{n_k}) \to a \in A' \subset A$
$\Rightarrow$ A kapalı old.'dan $a \in A$

:tekrar

$(\Leftarrow)$ iddia: A kapalı ve sınırlı (HBT)

Sınırlılık: A sınırlı olmasın
$\exists (a_n) \subset A$ dizisi vardır $\ni$ $\|a_n\| \to \infty$ olur.

$\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}_+$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\ni$ $\forall n > N$ iken $\|a_n\| \geq M$ :metod
$\Rightarrow \|a_{k_n}\| > M$
$\Rightarrow \|a_{k_n}\| \to \infty$ $\rightarrow$ $a_{k_n}$ yakınsak olamaz

Kapalılık: $(\Leftarrow)$ $\forall a \in A$ için $\exists (a_n) \subset A$ $\ni$ $a_n \to a$) $a \in \bar{A}$ olsun.

(*) $\exists (a_n) \subset A$ vardır $\ni$ $a_n \to a$, (Kabulden) Ayrıca $\exists a_{k_n} \to b \in A$
$\Rightarrow a = b$
$\Rightarrow a \in A$
$\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow \bar{A} = A$ (A kapalı)

:tekrar

**SORU:** A kompakt, B kapalı $\Rightarrow$ A+B kompakttır (?)

$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$

$A = [0,1]$ kompakt $B = [0,\infty)$ kapalı $\Rightarrow A+B = [0,\infty)$

kapalı ama sınırlı değil
$\rightarrow$ kompakt değil

**SORU:** A kompakt ve B kapalı $\Rightarrow$ A+B kapalıdır.

A kompakt $\iff$ $\forall (a_n) \subset A$ bir alt dizisi $(a_{n_k}) \to a \in A$ yakınsar.

B kapalı $\iff$ $\forall b \in B$, $\exists (b_n) \subset B$ $\ni$ $b_n \to b$

**İddia:** A+B kapalıdır.

$x \in \overline{A+B}$ olsun. ($x \in A+B$ ?)

$\iff \exists (x_n) \subset A+B$ vardır $\ni$ $x_n \to x$

$x_n = a_n + b_n$, $a_n \in A$ ve $b_n \in B$
$\Rightarrow (b_n) = x_n - a_n \subset B = \bar{B}$ old.dan $\exists b \in B$ vardır $\ni$ $b_n \to b$ olur.
Ayrıca $b_{n_k} \to b$

$\Rightarrow x_{n_k} - a_{n_k} = b_{n_k} \to b$ ve $a_{n_k} \to a$ yakınsak old. dan

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} + b_{n_k} = a+b = x$$

$\Rightarrow x = a+b \in A+B$ Böylece $\overline{A+B}$ kapalı bulunur.

**SORU:** A ve B kapalı ise A+B kapalıdır.

$A = \{-n : n\in \mathbb{N}\} = \partial A \quad A^{o} = \emptyset \quad \bar{A} = \partial A \cup A^{o} = A$

$B = \{\frac{1}{n} + n : n\in\mathbb{N}\} = \partial B \rightarrow$ kapalı $= \partial B$

$A+B = \{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$ açık değil $\quad (A+B)' = \{0\}$

$\overline{A+B} = (A+B) \cup (A+B)'$
$= (A+B) \cup \{0\} \Rightarrow$ kapalı değil

**SORU:** A ve B kompakt ise $A\times B$ kompakttır.

$A\times B = \{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}$

$\Leftrightarrow$ her $(x_n) \subset A\times B$ dizisinin bir tane yakınsak alt dizisi vardır.

$x_n = (a_n, b_n)$

A kompakt, $\exists (a_{n_k}) \to a\in A$

O halde $x_{n_k} = (a_{n_k}, b_{n_k})$ alt dizisini düşünelim

$(b_{n_k}) \subset B$ dizi ve B kompakt $\Leftrightarrow \exists\, b_{n_{k_j}} \to b\in B$

$\Rightarrow x_{n_{k_j}} = (a_{n_{k_j}}, b_{n_{k_j}}) \to (a,b) \in A\times B \Rightarrow A\times B$ kompakttır

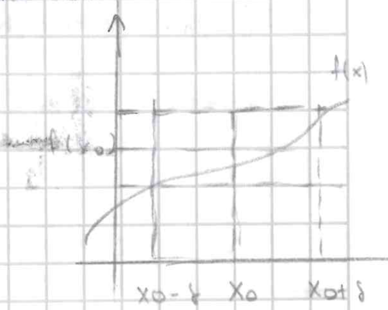
## Fonksiyonlar

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olmak üzere $U\subset \mathbb{R}^m$ açık kümesinin ters görüntüsü

$f^{-1}(U) = \{x\in\mathbb{R}^n, f(x)\in U\} \subset \mathbb{R}^n$ açık ise f fonk.una sürekli fonk. denir.

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x_0$ nok. süreklidir.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \ni |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$




$U = (f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$ açık küme

$f^{-1}(U) = f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)) \supset (x_0-\delta, x_0+\delta)$

**Teorem:** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olmak üzere $p_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun.

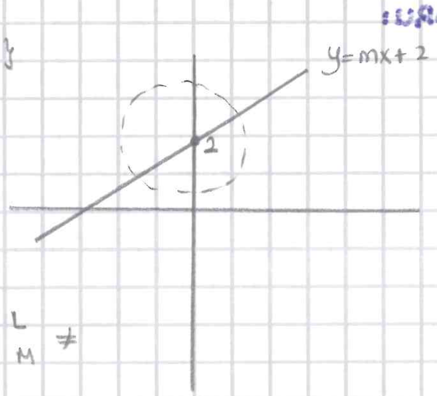
Eğer $p_n \to p_0$ olan her $(p_n)$ dizisi için $f(p_n) \to f(p_0)$ ise

$f$ fonk. $p_0$ noktasında dizisel süreklidir denir.

**Teorem:** $\mathbb{R}^n$, $d^n$'de

$f$ süreklidir $\iff$ $f$ fonk. dizisel süreklidir.

**Örnek:** $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+(y-2)^2}$ $\quad D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+(mx+2-2)^2} = \frac{1}{1+m^2} \quad \text{limit yok.}$$

$p_n = (x_n, y_n) \to (0,2)$ öyle ki $f(p_n) \to L$
$q_n = (u_n, v_n) \to (0,2)$ $\quad f(q_n) \to M$ $\quad \neq$

$$p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+2\right) \to (0,2) \Rightarrow f(p_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$\neq$ $\Rightarrow$ $f$ fonk. dizisel sürekli değil.

$$q_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{5}{n}+2\right) \to (0,2) \Rightarrow f(q_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{25}{n^2}} = \frac{1}{26}$$

**Örnek:** $f(x,y,z) = (\tanh(\sin(x+y+z)), \arctan(e^{\ln|x+y+z|}))$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$\{(x,y,z) : x+y+z=0\}$ tanım kümesinde sürekli

$p_0 = (1,-1,0)$

$$p_n = \left(1+\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (1,-1,0)$$

$$q_n = \left(1+\frac{1}{n}, -1+\frac{1}{n}, 0\right) \to (1,-1,0)$$

$$f(p_n) = (\tanh(\sin 0), \tan^{-1}(e^{\ln 3/n})) \to (0,0)$$

$$f(q_n) = (\tanh(\sin \tfrac{2}{n}), \tan^{-1}(e^{\ln 2/n})) \to (0,0)$$

**Teorem:** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f$ fonk. süreklidir $\Leftrightarrow$ $f$ fonk. dizisel süreklidir ( metrikle $f:(X,\rho) \to (Y,d)$ fonk için )
( Topoloji derisinde doğru değil. )

**İspat:** $f$, $p_0$' da sürekli $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \|p - p_0\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(p_0)\| < \varepsilon$

**İddia:** Her $p_n \to p_0$ için
$f(p_n) \to f(p_0)$

$(p_n)$ $p_0$'a yaklaşan herhangi bir dizi olsun. Verilen $\delta > 0$ için $\exists N \in$ ~~tamsayı~~ $\ni$
$\forall n > N$ iken $\|p_n - p_0\| < \delta$

O halde $\forall n > N$ için
$\|f(p_n) - f(p_0)\| < \varepsilon$ olur. $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p_0)$

($\Leftarrow$:) $f$ fonksiyonu dizisel sürekli olsun. ama sürekli olmasın.

$f$ sürekli değil $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ iken

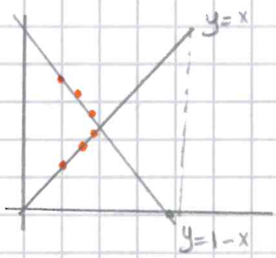
$\|p - p_0\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(p_0)\| \geq \varepsilon$

Diğer taraftan $p_n \to p_0$ iken $f(p_n) \to f(p_0)$

$\|p_n - p_0\| < \delta \Rightarrow \|f(p_n) - f(p_0)\| < \varepsilon$ $\to\cdot\leftarrow$ $f$ fonk. nun dizisel sürekli değildi.

**Örnek:** $f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 - x & , x \in \mathbb{I}\mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$ fonksiyonu sadece $x_0 = \frac{1}{2}$'de süreklidir.

Gösteriniz




$x_0 \in [0,1]$ o.ü. $f$ fonk. eğer $x_0$ noktasında dizisel sürekli ise
Her $(x_n) \subset \mathbb{R} \to x_0$
$\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$
$x_0$ noktasına $(x_n) \subset \mathbb{Q} \to x_0$ veya $(x_n) \subset \mathbb{I}\mathbb{Q}$

(1) $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ ise $\left.\begin{matrix} f(x_n) = x_n \to f(x_0) \\ x_n \to x_0 \end{matrix}\right\}$ limit tek $f(x_0) = x_0$

(2) $(x_n) \subset \mathbb{I}\mathbb{Q}$ ise $\left.\begin{matrix} f(x_n) = 1 - x_n \to f(x_0) \\ 1 - x_n \to 1 - x_0 \end{matrix}\right\}$ limit tek $f(x_0) = 1 - x_0$

$f(x_0) = 1 - x_0 = x_0$ , $x_0 = 1/2$

**Teorem:** $f$ $p_0$ noktasında sürekli $\Leftrightarrow$ Her $f(p_0) \in \mathbb{O}$ açık kümesinin $f^{-1}(\mathbb{O})$ açıktır.

**Örnek:** $A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2>1 \cup z^2+w^2<2\}$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z,w) = x^2+y^2$ sürekli $\qquad$ $g(x,y,z,w) = z^2+w^2$ sürekli

$A = \{(x,y,z,w) : x^2+y^2>1\} \cup \{(x,y,z,w)\ z^2+w^2<2\}$

$= f^{-1}((1,\infty)) \cup g^{-1}((-\infty,2))$

**Teorem:** $f$ $p_0$'da sürekli $\Leftrightarrow$ Her $f(p_0) \in C$ kapalı kümesi için $f^{-1}(C)$ kapalıdır.

**İspat:** $f$ $p_0$'da sürekli olsun. $f(p_0) \in C$ kapalı kümesini alalım.

$$C = C^\circ \cup \partial C$$

Eğer $f(p_0) \in C^\circ \Rightarrow f^{-1}(C^\circ)$ açıktır

$\Rightarrow C^\circ \subset C$

$\Rightarrow p_0 \in \underbrace{f^{-1}(C^\circ)}_{\text{açık}} \subset f^{-1}(C)$

Eğer $f(p_0) \in \partial C \Rightarrow \forall \varepsilon>0$ için

$B(f(p_0),\varepsilon) \cap C \neq \emptyset$ , $B(f(p_0),\varepsilon) \cap C^c \neq \emptyset$

$\emptyset \neq f^{-1}(B(f(p_0),\varepsilon) \cap C) \subset \underbrace{f^{-1}(B(f(p_0),\varepsilon)) \cap f^{-1}(C)}_{\neq \emptyset}$

$\Rightarrow f^{-1}(B(f(p_0)),\varepsilon) \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \partial f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C)$

$\Rightarrow f^{-1}(C)$ kapalı

**SORU:** $f$ fonksiyonu sürekli olmak üzere

$C$ kapalı $\Rightarrow f(C)$ kapalıdır. Doğru değil

$O$ açık $\Rightarrow f(O)$ açıktır. Doğru değil

$y=x^2$ fonk sürekli $(-1,1)$ açık

$f((-1,1)) = [0,1)$

**Teorem:** $f$ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk. olsun. $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ise $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ kompakttır.

**İspat1:** $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow \forall (p_n) \subset K$ için $\exists\, p_{n_k}$ var öyle ki $\lim\limits_{k\to\infty} p_{n_k} = p_0 \in K$

$f$ sürekli $\Leftrightarrow$ dizisel sürekli

$\forall f(p_n) \subset f(K) \subset \mathbb{R}^m$ öyle ki $f(p_{n_k}) \to f(p_0) \Leftrightarrow f(K)$ kompakt

**İspat 2:** $K$ kompakt ve $f(K)$ kümesi için $\{Q_i\}_{i\in I}$ bir açık örtü olsun.

$$\{f^{-1}(Q_i)\}_{i\in I} \text{ açık ve } f(K)\subset \bigcup_{i\in I} Q_i$$

$$\Rightarrow K\subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} Q_i\Big) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Q_i) \text{ olur.}$$

Böylece $\{f^{-1}(Q_i)\}_{i\in I}$ $K$ için bir açık örtüdür. $K$ kompakt olduğundan

$\{f^{-1}(Q_1), \dots, f^{-1}(Q_n)\}$ vardır $\ni$

$$K\subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(Q_i)$$

$$\Rightarrow f(K)\subset f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(Q_i)\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(Q_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \Rightarrow f(K) \text{ kompakt}$$

**Teorem:** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk. olsun. $A\subset\mathbb{R}^n$ bağlantılı ise $f(A)\subset\mathbb{R}^m$ bağlantılıdır.

**SORU:** $f(A)$ bağlantılı $\Rightarrow$ $A$ bağlantılıdır.
Yanlış!

$y=x^2$ $\quad f(A)=(1,2)$ bağlantılı $\quad A=(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$ bağlantısız.

**İspat:** $f(A)$ bağlantısız olsun.

$\exists\, U, V$ açık kümesi vardır öyle ki:
$$U\cap V=\emptyset$$
$$U\cap f(A)\neq\emptyset$$
$$V\cap f(A)\neq\emptyset$$
$$(U\cap f(A))\cup(V\cap f(A))=f(A)$$

$U, V$ açık olduğundan $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ açıktır.

$$f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U\cap V)=\emptyset \Rightarrow f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\emptyset$$

$$\emptyset\neq f^{-1}(U\cap f(A)) \overset{?}{\supset} f^{-1}(U)\cap f^{-1}(f(A)) \overset{?}{\supset} f^{-1}(U)\cap A\neq\emptyset$$

$$\emptyset\neq f^{-1}(V\cap f(A)) \overset{?}{\supset} f^{-1}(V)\cap f^{-1}(f(A)) \overset{?}{\supset} f^{-1}(V)\cap A\neq\emptyset$$

$$f^{-1}((U\cap f(A))\cup(V\cap f(A))) = f^{-1}(f(A))$$

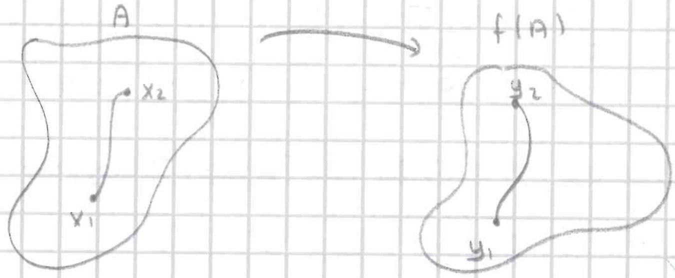
ve $A=(f^{-1}(U)\cap A)\cap(f^{-1}(V)\cap A)$

$\Rightarrow A$ bağlantısız.

**Teorem:** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonksiyon olsun

$A$ yol bağlantılı $\Rightarrow$ $f(A)$ yol bağlantılıdır.

İspat: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$




Fonksiyon tanımı

$y_1, y_2 \in f(A)$ için $\exists x_1$ ve $x_2$ vardır $\ni$ $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

$x_1$ ve $x_2$ noktaları için $\exists r$ fonksiyonu yazılır öyle ki:

$r: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sürekli

$t \mapsto r(t)$

$r(a) = x_1$, $r(b) = x_2$

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \xrightarrow{r} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow^{f \circ r} & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$f \circ r$ sürekli

$f \circ r: [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$f \circ r(a) = f(r(a)) = f(x_1) = y_1$

$f \circ r(b) = f(r(b)) = f(x_2) = y_2$

$y_1$ ile $y_2$ 'yi bir eğri birleştirir.

O halde $f(A)$ yol bağlantılıdır.

**Örnek:** $f(x,y) = x + y^2$ olsun. $D \subset \mathbb{R}$ ö.ö $0 \in f(D)$ ve $2 \in f(D)$ $1 \notin f(D)$ olsun. $D$ bağlantısızdır.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sürekli

$D$ bağlantılı olsun. $\Rightarrow$ $f(D) \subset \mathbb{R}$ bağlantılı $\Leftrightarrow$ $f(D)$ aralık

$f(D) = (a,b) \supset (0,2) \setminus \{1\}$

$= (0,1) \cup (1,2)$ $f(D)$ bağlantısız

**Örnek:** $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk. ve $D$ kompakt olsun. $y \in \mathbb{R}^m$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ olan bir $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ dizisi alalım. Eğer $f$ 1-1 ise $f(x) = y$ ve $\lim x_n = x$ olan bir $x \in \mathbb{R}^n$ vardır. Gösteriniz.

**İspat:** Her $(x_n) \subset D$ dizisi için $\exists (x_{n_k})$ alt dizisi vardır. Öyle ki $x$'e yakınsar.

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x \qquad f \text{ sürekli} \iff \text{dizisel sürekli}$$

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x)$$

Ayrıca $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = y$ olur.

Limit varsa tek, $f(x) = y$ olu

Aynı $(x_n) \subset D$ dizisi için

$x_{n_j} \to x'$ olsun.

$f$ sürekli $\Rightarrow f(x_{n_j}) \to f(x')$

Ayrıca;

$f(x_{n_j}) \to y$

$\to f(x') = y$

$\to f(x') = f(x) \xRightarrow{1-1} x' = x$ Tüm alt diziler $x$'e yakınsadı-

ğından $\lim x_n = x$ olur.

**1-1 olmadığında;**

**Örnek:** $y = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli

$x \longmapsto x^2$ 1-1 değil

$f(x_n) = 1$

$D = [-1, 1]$ kompakt $\subset \mathbb{R}$

$f(x_n) = x_n^2 \to 1 = f(x)$

$x_n = (-1)^n \quad f(x_n) = 1 \to 1$

$x_{2n} \to 1 \quad x_{2n+1} \to -1$

**Düzgün süreklilik:**

**Tanım:** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ düzgün süreklidir eğer $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki

$\forall p, q \in \mathbb{R}^n$, $\|p - q\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(q)\| < \varepsilon$

**Örnek:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ seçelim öyle ki

$\forall p, q \in \mathbb{R}$ $|p - q| < \delta$ için

$|f(p) - f(q)| = |ap + b - (aq + b)| = |a(p - q)| = |a| \, |p - q| < \varepsilon$ olduğundan

düzgün süreklidir.

**Örnek :** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ seçelim.

$\forall p, q \in \mathbb{R}$, $|p-q| < \delta \Rightarrow |\sin p - \sin q|$

$\cdot\ |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad p, q \in \mathbb{R}$ o.ü. $[p,q]$ aralığını alalım.

$\sin x$ sürekli $\sin x$ $(p,q)$ diferansiyellenebilir.

O.D.T.'den $\exists c \in (p,q)$ vardır öyle ki

$$\left| \frac{\sin p - \sin q}{p - q} \right| = |\cos c| \leq 1$$

$\Rightarrow |\sin p - \sin q| \leq |p - q| < \delta = \varepsilon$ $\sin x$ düzgün süreklidir.

**Örnek:** $y = x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de düzgün sürekli değildir.

D.S $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall p, q \in \mathbb{R}$ $\|p-q\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(q)\| < \varepsilon$
D.S değil $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \ni \exists p, q \in \mathbb{R}$ $\|p-q\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(q)\| \geq \varepsilon$

Verilen $\overset{=1}{\varepsilon > 0}$ için $\forall \delta = \frac{1}{n}$ alalım $\ni$ $|p-q| < \delta$

$p = n \quad q = n + \frac{\delta}{2}$ seçelim.

$\Rightarrow |f(p) - f(q)| = |n^2 - (n + \frac{\delta}{2})^2| = |n\delta + \frac{\delta^2}{4}| > 1$

d.s. değil

$y = x^2$ $\mathbb{R}$'de sürekli

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ seçelim öyle ki

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &\leq |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|) \\ &< \delta(\delta + 2|x_0|) = \varepsilon \end{aligned}$$

$\delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon = 0$

**Örnek:** $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (\underbrace{ax+b}_{ds}, \underbrace{\sin y}_{ds}, \underbrace{\frac{1}{1+x^2+y^2}}_{?})$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad F = (f_1, \ldots, f_m)$

düzgün sürekli $\iff$ $f_i$ düzgün sürekli

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/2$ seçelim öyle ki $\forall p, q \in \mathbb{R}^2$ $\|p-q\|_1 < \delta \Rightarrow$

$\|f(p) - f(q)\| < \varepsilon$

$|x_p - x_q| + |y_p - y_q|$

$$\|f(p) - f(q)\| = \left| \frac{1}{1+x_p^2+y_p^2} - \frac{1}{1+x_q^2+y_q^2} \right| = \left| \frac{x_q^2 - x_p^2 + y_q^2 - y_p^2}{\underbrace{(1+x_p^2+y_p^2) \cdot (1+x_q^2+y_q^2)}_{\alpha}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x_p^2 - x_q^2}{\alpha} \right| + \left| \frac{y_p^2 - y_q^2}{\alpha} \right| = |x_p - x_q| \cdot \frac{|x_p + x_q|}{\alpha} + |y_p - y_q| \frac{|y_p + y_q|}{\alpha}$$

$$\leq 2|x_p - x_q| + 2|y_p - y_q|$$

$$= 2(\|p-q\|_1) < 2\delta = \varepsilon$$

**Teorem:** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonksiyon ve $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt olsun. $f$ fonksiyonu $D$ üzerinde düzgün süreklidir.

**İspat:** $f$ fonksiyonunu $D$ üzerinde d.s olmasın

Verilen $\varepsilon = 1$ için $\forall \delta = \frac{1}{n}$ iken

$\forall p, q \in D \quad \|p-q\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(q)\| \geq 1$

$p \in D$ ve $D$ kompakt $\Rightarrow \exists p_n$ dizisi vardır öyle ki $p_{n_k} \to p$

Ayrıca $(p_n), (q_n) \subset \mathbb{R}^n$ vardır ve $\|p_n - q_n\| < \frac{1}{n}$

$\|q_{n_k} - p\|$

$= \|q_{n_k} - p_{n_k} + p_{n_k} - p\|$

$\leq \|q_{n_k} - p_{n_k}\| + \|p_{n_k} - p\|$

$< \frac{1}{n_k} + \varepsilon' \Rightarrow \lim q_{n_k} = p$

$f$ sürekli $\Rightarrow f(p_{n_k}) \to f(p)$

$f(q_{n_k}) \to f(p)$

$\|f(p_{n_k}) - f(q_{n_k})\| \to 0 \quad \to\leftarrow$

düzgün sürekli $\Rightarrow$ sürekli $\Longleftrightarrow$ dizisel sürekli
$\not\Leftarrow$

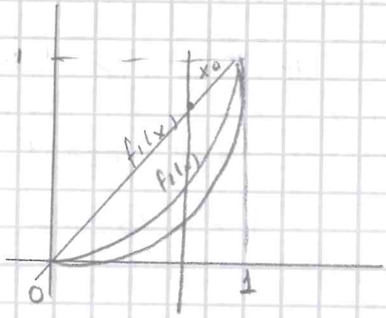
# Fonksiyon Dizileri

$(f_n)$ fonksiyon dizisinde $f_n$'ler bir fonksiyon olmak üzere $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şeklindedir.

$$f : \mathbb{N} \to X = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ fonksiyonlar} \}$$
$$n \mapsto F(n) = f(n)$$

**Örnek:** $f_n(x) = x^n$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \ \ldots$



**Tanım:** $(f_n)$ fonksiyon dizisi $D$ bölgesi üzerinde tanımlı olsun. Her $x_0 \in D$ için $(f_n(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$ dizisi yakınsak ise $(f_n)$ fonk dizisine noktasal yakınsak denir.

**Örnek:** $x = 0, \ f_n(0) = 0 \to 0$

$x = 1, \ f_n(1) = 1 \to 1$

$0 < x_0 < 1, \quad f_n(x_0) = x_0^n \to 0$ ispat!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

$f_n \xrightarrow{n} f$

$f$ sürekli değil önemli!

! $f$ noktasal yakınsak $\Longleftrightarrow$ $x_0 \in D$ olsun. $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N = N(\varepsilon, x_0)$ öyle ki $\|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad \forall n > N$ önemli!

**Örneğin devamı;** Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = [|\log_r^{1/\varepsilon}|] + 1$ seçelim öyle ki

$|x_0^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N \qquad |x_0^n| = |x_0|^n = x_0^n < \varepsilon$

$x_0 < 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{r} \quad r > 1$

$\frac{1}{r^n} < \varepsilon, \quad r^n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \log_r^{1/\varepsilon}$

$n > [|\log_r^{1/\varepsilon}|] + 1 = N$

**Örnek:** $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$ $\qquad$ **İddia:** $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{noktasal}} 0$

$x_0 \in \mathbb{R}$ fix olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists N = \frac{1}{\varepsilon |x_0|}$ seçelim öyle ki $\forall n > N$ iken

$$|f_n(x_0) - 0| = \left| \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} \right| \le \frac{n|x_0|}{n^2 \cdot |x_0|^2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon |x_0|}$

**Örnek:** $f_n(x) = (x \cdot e^{-nx})_{n=1}^{\infty}$ $[0,\infty)$

$f_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$ $0 < x_0 < \infty$ olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0}{e^{nx_0}} = 0 = f(x_0)$

**İddia:** $f_n(x) \xrightarrow{nok.} 0$ $[0,\infty)$ aralığında

Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists N = \left[\ln\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)\right]^{1/x_0} + 1$ seçelim öyle ki

$\forall n > N$ iken $|f_n(x_0) - 0| = \left|\frac{x_0}{e^{nx_0}}\right| < \varepsilon$

$e^{nx_0} > \frac{x_0}{\varepsilon} \Rightarrow nx_0 > \ln\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$

**Örnek:** $f_n(x,y) = \left(\underbrace{\sin\frac{x}{n}}_{f_{1,n}}, \underbrace{\frac{y}{n}}_{f_{2,n}}\right)$, $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(f_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_{1,n}((x,y)) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = \sin 0 = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ ve $\sin x$ sürekli olduğundan dizisel sürekli

böylece $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$

Fix $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N =$ seçelim öyle ki $\forall n > N$ iken $\left|\sin\frac{x_0}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\sin\frac{x_0}{n}\right| \leq \frac{|x_0|}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{|x_0|}{\varepsilon}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_{2,n}((x,y)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y}{n} = 0$

$f_n(\vec{x}) \xrightarrow{nok.} f(\vec{x}) = (0,0)$

**Örnek:** $(f_n(x)) = \left(n \cdot \sin\frac{(x^n)}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $[-1,1]$ aralığında incelenmelidir.

$x_0 \in \mathbb{R}$ fix olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{(x_0^n)}{n}$

$x_0 > 1$ $x_0^n = g(n)$, $g(x) = x_0^x$ $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = $ yok.

$\frac{1}{n} = h(n)$ $h(x) = \frac{1}{x}$

$x_0 < -1$ $k_n = x_0^n$ $x_0 = -2$ L.y

$\{k(n)\} = \{-2, 4, -8, -16, \ldots\}$

$x = -1$ ise $f_n(-1) = n \cdot \sin\frac{(-1)^n}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{((-1)^n)}{n}$ $(\infty \cdot 0)$

$\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ve $\sin x$ sürekli $\Rightarrow \sin\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$a_n = n \cdot \sin\frac{(-1)^n}{n}$

$a_{2n} = 2n \cdot \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$ $a_{2n+1} = (2n+1) \cdot \sin\left(\frac{-1}{2n+1}\right)$

(dizi → kopuk kopuk)

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n \cdot \sin\frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$(\text{fonksiyon}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{2x}\right)\cdot\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1 \cdot \sin\left(\frac{-1}{2n+1}\right)}{\frac{1}{2n+1}} = -1$$

$(f_n)$ fonksiyon dizisi $x=-1$ için noktasal yakınsak değildir.
$-1 \le x < 0$ için $(f_n)$ noktasal yakınsak değildir.
$[0,1]$ aralısı incelenmeli

$$f_n(0) = 0 \longrightarrow 0 = f(0)$$
$$f_n(1) = n \cdot \sin\frac{1}{n} \longrightarrow 1 = f(1) \qquad 0 < x_0 < 1 \qquad f_n(x_0) = n \cdot \sin\left(\frac{x_0^n}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(x_0)$$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\ln \frac{1/\varepsilon}{1/x_0}\right] + 1$ öyleki $\forall n > N$ iken

$$|f_n(x_0) - 0| = \left| n \cdot \frac{\sin(x_0)^n}{n} \right| \le n \cdot \frac{|x_0|^n}{n} < \varepsilon$$

$$n \cdot \ln x_0 < \ln\varepsilon \Rightarrow n \cdot (-\ln x_0) > -\ln\varepsilon$$

$$n > \frac{-\ln\varepsilon}{-\ln(x_0)}$$

**Örnek:** $f_n(x) = \left( \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{f_{1,n}}, \underbrace{n(\sqrt[n]{x}-1)}_{f_{2,n}} \right) \qquad f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$

$$f_n(x_0) = \left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n, \quad \lim \left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{n \cdot \ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right)} = (0 \cdot \infty), \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{x_0}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x_0}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-\frac{x_0}{x^2}}{1+\frac{x_0}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = e^{x_0}$$

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{nok}} f(x_0) = e^x$$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$ fix olsun.

GIPTA

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N =$ öyleki $\forall n \geq N$ $|f_n(x_0) - e^{x_0}| < \varepsilon$

$f(x) = e^x$ $\quad f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$ $\quad f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$ $\quad f''(0) = 1$ --- $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ için. O halde}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall n \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$|f_n(x_0) - e^{x_0}|$$

$$\leq \left| \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^n - 1 - x_0 - \frac{x_0^2}{2!} - \dots - \frac{x_0^n}{n!} \right|$$

Dağılım Yakınsaklık

$$= \left| \binom{n}{n} 1 + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} \cdot \frac{x_0}{n} + \binom{n}{n-2} 1^{n-2} \cdot \left(\frac{x_0}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{1}\left(\frac{x_0}{n}\right)^{n-1} + \binom{n}{0}\frac{x_0^n}{n^n} \right.$$
$$\left. - \cancel{1} - x_0 - \frac{x_0^2}{2!} - \dots - \frac{x_0^n}{n!} \right|$$

$$= \left| \left( \binom{n}{n-1} \frac{1}{n} - 1 \right) x_0 + \left( \binom{n}{n-2} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2!} \right) x_0^2 + \dots + \left( \binom{n}{0} \frac{1}{n^n} - \frac{1}{n!} \right) x_0^n \right|$$

Örnek!

$$\leq \left| \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2!} \right| x_0^2 \leq \left| \left( \frac{n-1}{n} - 1 \right) \right| \left| \frac{x_0^2}{2!} \right| + \dots + \left| \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{n!} \right| \cdot \frac{x_0^n}{n!}$$

$< \varepsilon$

bir tane $N_0$ değeri için bulunur Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists N_0$ vardır öyleki $\forall n \geq N_0$ $\left(\frac{x_0^n}{n!}\right) < \varepsilon$

$x_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x_0) \quad n(\sqrt[n]{x_0} - 1) \quad \infty \cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[x]{x_0} - 1}{\frac{1}{x}} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-\ln x_0 \frac{x_0}{x^2} \cdot x_0^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln x_0 \cdot x_n^{1/x} = \ln x_0$$

$\left( \ln x_0^{1/x} = \ln y \right.$
$\ln y = \frac{\ln x_0}{x}$
$\left. \left( \frac{y'}{y} = -\frac{\ln x_0}{x^2} \right) \right)$

$f_{2,n}(x) \xrightarrow{nok.} \ln x$

$f_n(x) \xrightarrow{nok.} (e^x, \ln x) = f(x) \quad x_0 \in \mathbb{R}_+ \quad f(x)$ olsun.

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N =$ seçelim öyle ki $\forall n > N$

$$|f_{2,n}(x_0) - \ln(x_0)| < \varepsilon$$

$g(x) = \ln x$
$g'(x) = \frac{1}{x}$
$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\vdots$

$g(1) = 0$
$g'(1) = 1 = 0!$
$g''(1) = -1 = 1!$
$g'''(1) = 2!$
$g^{(IV)}(1) = -3!$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)} \frac{(1)}{n!} (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!} (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$$

$$\ln x \geq (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n$$

$$|f_{2,n}(x_0) - \ln(x_0)| \leq |n(\sqrt[n]{x_0} - 1) - (\quad)|$$

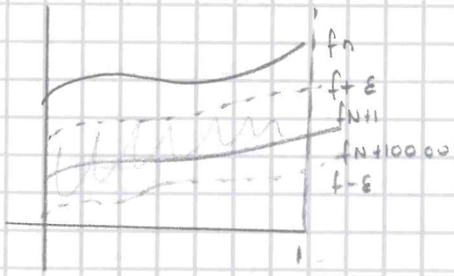
## Düzgün Yakınsaklık

$f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyon dizisi $D$ kümesi üzerinde tanımlı olsun.

$x \in D$ için $f_n(x) \to a_x = f(x)$ $\quad f_n \xrightarrow{n} f$

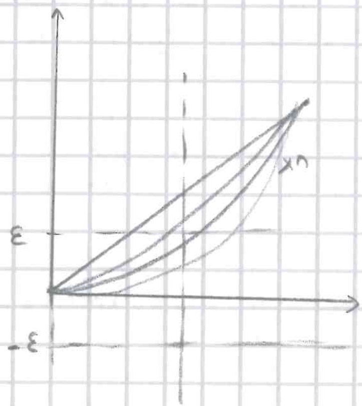
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, x)$ öyle ki $\forall n > N$ için $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

$f_n \xrightarrow{d} f \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ öyle ki $\forall n > N$ için $\|f_n - f\| < \varepsilon$




**Örnek:** $f_n(x) = x^n$ $[0,1]$, $f_n(0) \to 0 = f(0)$
$f_n(1) \to 1 = f(1)$
$0 < x_0 < 1$ $f_n(x_0) \to 0 = f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$




$f_n \xrightarrow{d} 0$

$f_n(x) = x^n$, $[0, r]$ $r<1$

$f_n(0) \to 0$

$f_n(r) = r^n \to 0$

$0<x<r$ $f_n(x) = x^n \to 0$

$f_n \xrightarrow{n} f = 0$

$f_n \xrightarrow{d} 0$ ?

Verilen $\varepsilon>0$ için $\exists N = [| \ln \frac{\varepsilon}{r} |]^{+1}$ seçelim öyle ki $\forall n > N$ iken $|a_n - 0| = |x^n|$

$= x^n \leq r^n < \varepsilon \Rightarrow n \cdot \ln r < \ln \varepsilon$

$n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln r}$

**Teorem:** $(f_n)$'ler $D$ üzerinde tanımlı olmak üzere,

$(f_n)$ fonk. dizisi $f$'le düzgün yakınsar $\iff c_n := \sup_{x \in D} \| f_n(x) - f(x) \| = 0$

**Örnek:** $f_n(x) = x^n$ fonksiyon dizisi $[0,r]$, $r<1$ aralığında tanımlı olsun. $f_n \to 0$ düzgün yakınsar. Gösteriniz.

$f_n : [0, r] \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$

$\| f_n(x) - 0 \| = \| x^n \|$

$c_n := \sup_{0 \leq x \leq r} x^n = r^n$ $(c_n) = (r^n) = (r, r^2, \ldots)$ $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

Teoremden $f_n \xrightarrow{d} 0$

**Örnek:** $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $[0, r]$, $r<1$

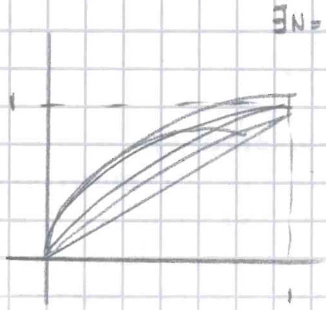
$f_n(0) = 0^{1/n} = 0 \to 0$

$0 < x \leq r < 1$ $f_n(x) = x^{1/n} \to 1$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq r \end{cases}$

$x_0 \in [0, r]$ o.u. verilen $\varepsilon > 0$

$\exists N =$ seçelim öyle ki $\forall n > N$ iken $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$



$|x_0^{1/n} - 1| = |1 - x_0^{1/n}| < \varepsilon$

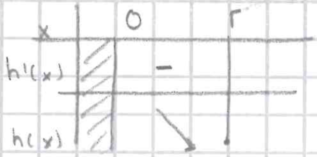
$= 1 - x_0^{1/n} < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < x_0^{1/n}$

$\ln(1-\varepsilon) < \frac{1}{n} \ln(x_0)$

$n < \dfrac{\ln(x_0)}{\ln(1-\varepsilon)} \Rightarrow n > \dfrac{\ln x_0}{\ln(1-\varepsilon)}$

$c_n := \sup\limits_{0<x\leq r} |x^{1/n} - 1| = \sup\limits_{0\leq x\leq r} \overbrace{1 - x^{1/n}}^{h(x)} = 1$ $\qquad h(x) = 1 - x^{1/n}$

$h'(x) = -\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ $\qquad x = 0$ K.N.




$c_n \not\to 0$ düzgün yakınsak değildir.

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme

$C(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m, \text{ sürekli} \}$ $\qquad \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$

**İspat:** $(\Rightarrow)$ $f_n \xrightarrow{d} f$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall x \in D$ $\forall n > N$ için $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

$|c_n - 0| = c_n < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim c_n = 0$

$(\Leftarrow)$ $c_n \to 0$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ iken $|c_n - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in D} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \ \forall x$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[d]{} f$

**Teorem:** $f_n \xrightarrow{d} f \iff \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

**Teorem:** $(f_n)$ fonksiyon dizisi $D$ üzerinde sürekli ve $f_n \xrightarrow{d} f$ ise $f$ süreklidir.

**İspat:** $f_n \xrightarrow{d} f \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ öyle ki $\forall x \in D$, $\forall n > N$ için

$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$f_n$, $D$'de sürekli $\iff$ $x_0 \in D$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta' > 0$ öyle ki

$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

**İddia:** $f(x)$ fonksiyonu $x_0$'da süreklidir. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\delta', N)$ seçelim

$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| = \|\underbrace{f(x) - f_n(x)}_{} + \underbrace{f_n(x) - f_n(x_0)}_{} + \underbrace{f_n(x_0) - f(x_0)}_{}\|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\Rightarrow f$ süreklidir.

**Örnek:** $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad x \in [0,1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \le 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$f_n$ sürekli, $f(x)$ süreksiz $\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{d} f$

**Örnek:** $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $\quad , x \in [0,1]$

$x = 0$, $f_n(0) = 0 \rightarrow f(0) = 0$

$x = 1$, $f_n(1) = 1 - 1 = 0 \rightarrow f(1) = 0$

$0 < x_0 < 1$ $\quad f_n(x) = x^n(1-x) \rightarrow f(x) = 0$

$f_n \xrightarrow{n} f(x) = 0$

$f_n \xrightarrow{d} 0 \iff c_n \rightarrow 0$

$$c_n = \sup_{0 \le x \le 1} \| f_n(x) - f(x) \| = \sup_{0 \le x \le 1} |x^n - x^{n+1} - 0|$$

$$= \sup_{0 \le x \le 1} \underbrace{x^n(1-x)}_{h(x)}$$

$h'(x) = n \cdot x^{n-1} - (n+1) \cdot x^n = n x^{n-1} \left(1 - \frac{(n+1)}{n} \cdot x\right)$

$h'(x) = 0 \iff x = 0$ veya $1 - \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot x = 0$

$x = 0$ veya $x = \frac{n}{n+1}$

| $x$ | $0$ | $x_0$ | $n/n+1$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | | $-$ |
| $h(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$x_0 < \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{n} x_0 < 1$

$$c_n := h\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \qquad \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{-1}$$

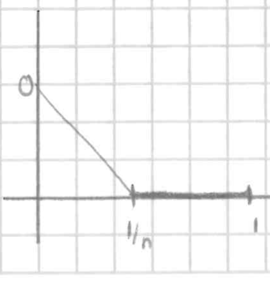
$c \not\rightarrow 0$ $\qquad$ düzgün yakınsak değil

**Dini Teoremi:** $A$ kompakt $(f_n)$ sürekli fonksiyon dizisi monoton olsun. $f_n \xrightarrow{nok.} f$ ve $f$ sürekli ise $f_n \xrightarrow{d} f$

**Örnek:** $A = (0,1)$ $\quad f_n(x) = x^n$ $\quad f_n \rightarrow 0$ noktasal

Fakat $f_n$'ler 0'a düzgün yakınsamaz. Dini teoremi çalışmıyor. $A$ kompakt değil

**Örnek:** $A = [0,1]$ $\quad f_n$ yine monoton

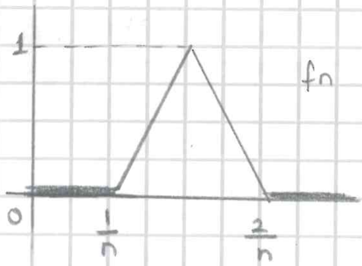



$f_n \xrightarrow{n} f$


$f$ sürekli olmadığından dini teoremi çalışmıyor.

neden tekrar inceledik?

**Örnek**




$f_n \underset{n.}{\longrightarrow} 0$ Ama $f_n \to 0$ düzgün yakınsamaz.

$f_n$ monoton değil. Dini teoremi çalışmıyor.

**Örnek:** $A=[0,1]$

$f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n}$ $\quad f_n \xrightarrow{n.} 0$ $\quad \left( \text{Çünkü } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+n} = 0 \right)$

$f_n$ ve $f$ sürekli, Ayrıca $f_n$ monotondur.

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^2}{x^2+n+1} \le \frac{x^2}{x^2+n} = f_n(x)$$

Dini Teoremi: $f_n \xrightarrow{d.} 0$, Madem $f_n \xrightarrow{d.} 0$

$$\sup_{0\le x\le 1} \left| \frac{x^2}{x^2+n} - 0 \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ olmalı}$$

$h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{2xn^2}{(x^2+n)^2} = 0 \Rightarrow x=0$

| $x$ | | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | | $+$ | $+$ |
| $h(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

$$h(1) = \frac{1}{1+n} = 0$$

$c_n \to 0$ ✓

**Örnek:** $g_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+x+e^n}$ $\quad A=[0,1]$

noktasal olarak $g_n \to 0$ dır. Çünkü $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{n^2x^2+x+e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{nx}{e^n} \nearrow 0}{\frac{n^2x^2}{e^n} + \frac{x}{e^n} + 1} = 0$

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} = \frac{(n+1)\cdot x}{(n+1)^2x^2+x+e^{n+1}} \cdot \frac{n^2x^2+x+e^n}{nx} = \frac{n+1}{n} \cdots < \frac{n}{n+1} < 1$$

$\dfrac{g_{n+1}}{g_n} \le 1 \Rightarrow g_{n+1} \le g_n$ $(g_n)$ monoton

Dini teoremi $\Rightarrow g_n \xrightarrow{d.} 0$

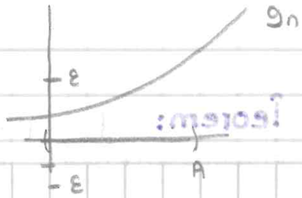
**Dini teoreminin İspatı:**

$f_n : A \to \mathbb{R}$, $A$ kompakt $f_n \xrightarrow{n.} f$, $f: A \to \mathbb{R}$ Ayrıca $(f_n)$ artan olsun.

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \ldots \le f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$g_n = f - f_n \searrow \xrightarrow{n.} 0$ yani $\forall x \in A$ için $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$

azalan




açık

Ayrıca $g_n$'ler pozitif old. $g_n^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) = g_n^{-1}([0,\varepsilon))$

$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0 \iff \exists N=N(\varepsilon,x) \quad \forall n\geq N \quad |g_n(x)-0|<\varepsilon$. Yani $0\leq g_n(x)<\varepsilon$

noktasal

olur. Buradan $x\in g_{N+1}^{-1}([0,\varepsilon)) = g_{N+1}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ $\quad \underset{\text{kompakt}}{A} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}[0,\varepsilon)$

$A \subseteq g_{n_1}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \cup \dots \cup g_{n_k}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ Ayrıca $g_n$ azalan old.

$g_n^{-1}[0,\varepsilon) \subseteq g_{n+1}^{-1}[0,\varepsilon)$

$\exists N_0 \quad \forall n\geq N_0 \quad \forall x\in A \subseteq g_{N_0}^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon) \qquad |f_n(x)-f(x)| = |g_n(x)|\leq\varepsilon$

$$f_n \xrightarrow{d.} f$$

~~Tanım:~~ **Teorem:** $(f_n)$ fonksiyon dizisi $A$ aralığında sürekli ve $f$'ye düzgün yakınsarsa, $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,dt$ fonksiyon dizisi de $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$'e düzgün yakınsar.

**İspat:** $f_n \xrightarrow{d.} f \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon) \quad \forall x\in A \quad \forall n\geq N \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Verilen bir $\varepsilon>0$ için $N$ seçelim.

$$|F_n(x)-F(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,dt = \varepsilon|x-a| \leq \varepsilon\cdot|I|$$

noktaya bağlı değil

**Örnek:** $F_n(x)=\dfrac{\ln(1+n^3x^2)}{n^2}$ nin $F=0$'a $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsadığını göster

**Çözüm:** $F_n'(x)=f_n(x)=\dfrac{2xn^3}{1+n^3x^2}\cdot\dfrac{1}{n^2} \longrightarrow 0$'a düzgün yakınsadığını gösterelim

$0\leq C_n=\sup\limits_{0\leq x\leq 1}\left|\dfrac{2nx}{1+n^3x^2}-0\right| \longrightarrow 0$ old. gösterelim

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{2nx}{1+n^3x^2} = \dfrac{2n-2n^4x^2}{(1+n^3x^2)^2}=0 \qquad 2n=2n^4x^2 \to x=\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}$

| | 0 | | $\sqrt{\frac{1}{n^3}}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h_n'$ | | + | | − | |
| $h_n$ | | ↗ | | ↘ | |

$h_n\left(\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$

**Teorem:** $f_n$ fonksiyon dizisi $I=[a,b]$ aralığında tanımlanan reel değerli integrallenebilir ve $f_n \to f$ düzgün yakınsak olsun.

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

**İspat:** $f_n \xrightarrow{d} f \iff \forall \varepsilon>0 \quad \exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 \quad x \in [a,b]$

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (*) \text{ dır.}$$

Ayrıca $f_{N_0}$ integrallenebilir olduğundan öyle bir $P$ parçalanışı vardır ki

$$Ü(f_{N_0},P) - A(f_{N_0},P) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\}$ $\quad M_k' = \sup\{f_{N_0}(x) : x \in [x_{k-1},x_k]\}$

$$Ü(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(M_k' + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k' \Delta x_k + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3(b-a)} \underbrace{\sum_{k=1} \Delta x_k}_{b-a}}_{\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$Ü(f,P) \leq Ü(f_{N_0},P)$$

Benzer şekilde $A(f,P) \geq A(f_{N_0},P) + \varepsilon/3$ bulunur

$$Ü(f,P) - A(f,P) = Ü(f,P) - Ü(f_{N_0},P) + Ü(f_{N_0},P) - A(f_{N_0},P) + A(f_{N_0},P) - A(f,P)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow{d} f \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

**Teorem:** $f_n$ fonksiyonları sınırlı bir $I$ aralığında tanımlı ve $\underbrace{\text{sürekli türeve}}_{f_n' \text{ var}}$ sahip olsunlar.

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ dizisi } f\text{'ye noktasal yakınsak} \\ f_n' \text{ dizisi } g\text{'ye düzgün yakınsak} \end{array}\right\}$ ise $g = f'$ dir.

Yani $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$ dir.

**İspat:** $f_n, f_n'$ sürekli fonksiyon

$f_n' \xrightarrow{d} g \Rightarrow g$'de sürekli bir fonksiyondur.

$$\int_c^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(c)$$

$$\int_c^x g(t)dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_c^x (f_n(x) - f_n(c)) = f(x) - f(c)$$

$\int_c^x g(t)dt = f(x) - f(c)$ $\quad$ Temel teoreme göre $G(x) = \int_a^x g(t)dt$

türevlenebilirdir. $G'(x) = g(x)$

$G(x) = f(x) - f(c) = g(x) = f'(x)$ bulunur.

**Tanım:** $(f_n)$ D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizisi olmak üzere eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall x \in D$, $\forall n > m > N$ için $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ ise $f_n$'e düzgün Cauchy denir.

**Teorem:** $(f_n)$ D üzerinde tanımlı fonksiyon dizisi olsun. $(f_n)$ düzgün Cauchy'dir $\Leftrightarrow$ $(f_n)$ düzgün yakınsar.

**NOT:** $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ (kompakt, Hausdorff uzay) tam normlu uzay
X kompakt $\subset \mathbb{R}^n$

**İspatı** ($\Leftarrow$:) $f_n \xrightarrow{d.} f$ Verilen $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N' \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall x \in D$, $\forall n > N'$ için $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = N'$ seçelim öyle ki $\forall x \in D$, $\forall n > m > N$ için $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_m(x)\|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow (f_n) \text{ düzgün Cauchy}$$

($\Rightarrow$) $(f_n)$ Düzgün Cauchy $\Rightarrow$ her $x \in D$ için $(f_n : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k)$

$(f_n(x)) \subset \mathbb{R}^k$ Cauchy Dizisi $\Leftrightarrow$ $f_n(x) \xrightarrow{n} a_x = f(x)$

$f_n \xrightarrow{n} f$

Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki: $\forall n > N$ $\forall x \in D$ için $(\forall n > m > N)$

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{m \to \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{d.} f$$

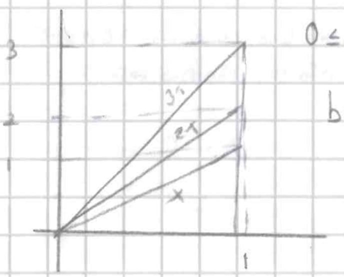
**Tanım:** $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$

$(f_n)$ fonksiyon dizisi $D = [a,b]$ üzerinde tanımlı ve reel değerli fonksiyon dizisi olsun. Bir tane $M \in \mathbb{R}_+$ var ve her $n \in \mathbb{N}$, her $x \in D$ için

$|f_n(x)| \leq M$ ise $(f_n)$ fonksiyon dizisine düzgün sınırlıdır denir.

$f_n$ fonksiyonu sınırlı, $\exists M_n \in \mathbb{R}_+$ var öyle ki $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in D$

düzgün sınırlı $\Rightarrow$ sınırlı
$\not\Leftarrow$ Örneğin; $f_n(x) = nx$ $[0,1]$

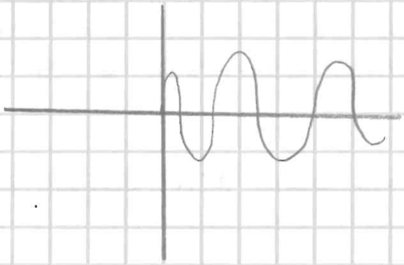



$0 \leq f_n(x) \leq n = M_n$
sınırlı ama
bir tane M vardır öyle ki
$|nx| \leq \cancel{M}$ $\forall n$ $\forall x$
düzgün sınırlı değildir.

$\rightarrow f_n(x) = \frac{x}{n}$ $[0,1]$ $\exists M = 1$ vardır öyle ki

$$0 \leq \frac{x}{n} \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$f_n(x) = \sin nx \quad x \in \mathbb{R}$ $\quad \exists M=1$ vardır öyle ki



$-1 \leq \sin nx \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq |\sin nx| \leq 1$

**Teorem: Weierstrass Yaklaşım Teoremi:**

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists p$ polinomu vardır öyle ki $\|p - f\|_\infty < \varepsilon$ $\quad D$ kompakt

$\left( C(D) = \{ f : D \to \mathbb{R} \text{ sürekli} \}, \|\cdot\|_\infty \right)$ tam normlu uzay

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

$$\underset{f(x)}{\overset{\parallel}{\sin x}} = \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}_{p(x)} + \dots + \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\|f - p\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin x - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Önerme:** Her sürekli fonksiyona bir $(p_n)$ polinom dizisi ile düzgün yaklaşılı-

$\sin x = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$p_0(x) = a_0$

$p_1(x) = a_0 + a_1 x$

$\vdots$

$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$f$, $D$ üzerinde sürekli, WYT'den verilen $\varepsilon_n > 0$ için $\exists p_n$ öyle ki

$$\|p_n - f\|_\infty < \varepsilon_n$$

$(p_n)$ polinom dizisi $\xrightarrow{d} f$

$$\iff c_n = \sup_{x \in D} |p_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$$

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} c_n \leq \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} c_n = 0$$

## Sayı Serileri:

$(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ dizisi o.u. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ toplamına seri denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ ise seriye yakınsak denir aksi durumda ıraksaktır.

$(a_n) = 1$ , $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$ ıraksak.

Kısmi toplamlar dizisi: $S_1 = a_1$ , - - - , $S_n = a_1 + \dots + a_n$

$(S_n) \subset \mathbb{R}$ dizi, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$ seri yakınsak (ıraksak) $\Leftrightarrow$ $S_n$ yakınsak (ıraksak)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Leftrightarrow \quad S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ tek} \\ 0 & n \text{ çift} \end{cases}$

$\lim S_{2n} = 0 \neq -1 = \lim S_{2n+1}$ $(S_n)$ ıraksak

Harmonik seri $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak

Teleskopik seri $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Geo. Seri $= \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & |r|<1 \\ \text{ıraksak} & |r| \geq 1 \end{cases}$

## Pozitif Terimli Serilerin Yakınsaklık Testleri

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = f(n)$

1.) integral Test
p-Testi
2.) Oran Testi
3.) Kök Testi
4.) Karşılaştırma
5.) Limit Karşılaştırma
6.) Raabe

**1.) İntegral Test:** $f(x)$ fonksiyonu $[1,\infty)$ sürekli azalan ve pozitif olsun.

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ yakınsak $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ Yakınsak
ıraksak $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ Iraksak

**İspat:**


$a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 1 + \dots + a_\alpha \cdot 1 \leq \int_1^{\alpha} f(x)\,dx \leq a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_{\alpha-1} \cdot 1$

$S_\alpha - a_1 \leq \int_1^{\alpha} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\alpha-1} a_n = S_{\alpha-1} \leq S_\alpha$

$\lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha$

**Örnek:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $\quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad [2,\infty)$ $\quad \geq 0$ sürekli

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \qquad \begin{array}{l} K.N \quad x = e \\ T.N \quad x = 0 \end{array}$$

| x | | 2 | e | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | − |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ |

$f(x) \searrow \quad [3,\infty)$

$$\int_3^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_3^{\alpha} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\ln 3}^{\ln \alpha} u\,du$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\ln^2\alpha}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} = \infty \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \text{ ıraksak}$$

**P-test:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{ıraksak } & p \leq 1 \\ \text{yakınsak } & p > 1 \end{cases}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^p}$ sürekli $[1,\infty)$ azalan pozitif

$p = 1 \Rightarrow$ Harmonik seri / ıraksak

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_1^{\alpha} x^{-p}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

## Limit Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ iki pozitif terimli seri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

1.) $0 < L < +\infty$ ise ikisi de aynı karakter

2.) $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak $\Rightarrow$ $\sum a_n$ yakınsak
   $\sum a_n$ ıraksak $\Rightarrow$ $\sum b_n$ ıraksak

3.) $L = +\infty$ ve $\sum a_n$ yakınsak $\Rightarrow$ $\sum b_n$ yakınsak
   $\sum b_n$ ıraksak $\Rightarrow$ $\sum a_n$ ıraksak

**İspat:** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n > N \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \qquad (L-\varepsilon)\,b_n < a_n < (L+\varepsilon)\,b_n$

$L = 0 \Rightarrow 0 < a_n < \varepsilon b_n \qquad \forall n > N$

$L = +\infty \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \ni \quad \forall n > N$ iken $\frac{a_n}{b_n} > M$

$a_n > M b_n > 0$

**Kummer Testi:** $\sum a_n$ pozitif ve $(p_n)$ dizisi de

$$\lim_{n\to\infty} p_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} = K \quad \left( \lim_{n\to\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \cdot n = K+1 \right)$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçilen bir dizi olsun.

1.) $K<0$ ve $\sum \frac{1}{p_n}$ ıraksak $\Rightarrow$ $\sum a_n$ ıraksak

2.) $K>0$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ yakınsak

**Raabe Testi:** $(p_n = n)$ $\sum a_n$ pozitif terimli seri ve $\lim_{n\to\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \cdot n = L$ olsun.

1.) $L<-1$ ıraksak
2.) $L>-1$ yakınsak

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}$

Oran testinden;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \quad \text{Test Çalışmaz}$$

Raabe Testi;

$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \cdot n = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} > -1$$

Raabe testinden yakınsak

**Abel Kriteri:** $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri için

1.) $\sum b_n$ yakınsak
2.) $(a_n)$ monoton ve sınırlı ise $\sum a_n b_n$ yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ Alterne harmonik seri A.S.T. $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ ↘ ve $\geq 0$ $\Rightarrow$ Yakınsak

$$\sum \frac{1}{n} = \sum \underbrace{(-1)^n}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{b_n} \to \text{Abel Kriteri kullanılamaz}$$

$a_n$ ↓ sınırlı fakat monoton değil

$b_n$ ↓ Yakınsak

**Örnek:** $\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{b_n}$ $\to$ Abel kriterinden yakınsak

$b_n$ yakınsak

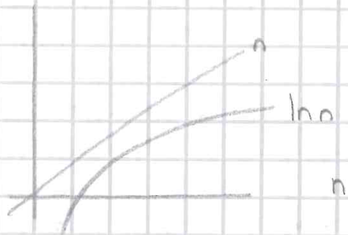
$a_n$ azalan
$0 < a_n \leq 1$
sınırlı

$\sum a_n$ serisi için $\sum |a_n|$ yakınsak ise $\sum a_n$ mutlak yakınsaktır.

mutlak yakınsak $\Rightarrow$ yakınsak
$\not\Leftarrow$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ koşullu yakınsak

**Örnek:** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$$

$$0 \le \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n} \right| \le \frac{1}{\ln^2 n}$$




$n > \ln n$

**Raabe:** $\sum \frac{1}{n}$, $p_n = n$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot n$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\ln^2(n+1) - \ln^2 n\right) \cdot \frac{n}{\ln^2 n} = \lim_{n\to\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) \cdot \left(\ln(n+1) + \ln(n)\right) \frac{n}{\ln^2 n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(n^2+n)}{\ln^2 n}}_{0}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln^2 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x+1}{x(x+1)}}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{2\ln x} = 0$$

$= 0$

$(L > -1)$ Raabe testinden yakınsak

**Örnek:** $$\sum_{n=2}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\ln^2 n}, \qquad \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right)$$

$$= (-1)^n \cos\left(\frac{-\pi n}{n+1}\right) = (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)}_{a_n} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}}_{b_n}$$ (alterne seri)

$-1 \le a_n \le 1$
azalan

$C_n = \frac{1}{\ln^2 n} \ge 0$, $\searrow$
$\to 0$
A.S.T. den yakınsak

$f(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)$ $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)$ $x \in [1, \infty)$ $\searrow$ azalan

$$f'(x) = -\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} < 0$$

$$= -\pi \cdot \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)}_{\ge 0}, \qquad \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi x}{x+1} \le \pi$$ $\Rightarrow$ Seri abel kriterinden yakınsaktır.

**Dirichlet Kriteri:** $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ iki seri ve $S_n = b_1 + \dots + b_n$ olsun.

1.) $S_n$ sınırlı
2.) $(a_n)$ azalarak sıfıra yakınsıyor ise $\sum a_n b_n$ yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ Alterne seri ($a_n > 0$ azalan $\lim a_n = 0$)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{(-1)^n}_{b_n}$ $\quad S_n = b_1 + \dots + b_n = -1+1-1 \dots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ çift} \\ -1 & n \text{ tek} \end{cases}$ Örnek

$-1 \leq S_n \leq 0$ sınırlı ve $\lim a_n = 0$ ve $a_n \searrow$

$\Rightarrow$ Dirichlet kriterinden yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\cos(nx)}^{b_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad a_n = \frac{1}{n} \searrow \to 0$

$S_n = b_1 + \dots + b_n = \cos x + \dots + \cos nx = \dfrac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n.2k\pi) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2(nk)\pi) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ıraksak}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad S_n = \dfrac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x \ \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$0 \leq |S_n| = \frac{\left|\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right| \left|\sin\frac{nx}{2}\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

Seri Dirichlet kriterinden yakınsaktır.

**Fonksiyon Serileri:**

$(f_n(x))$ fonksiyon dizisi $\Delta$ üzerinde tanımlı olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisine $\Delta$ üzerinde tanımlı fonksiyon serisi denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **noktasal** / **düzgün** yakınsak $\iff$ $S_n(x) = (f_1(x) + \dots + f_n(x))$ kısmi toplamlar fonksiyon dizisi **noktasal** / **düzgün** yakınsaktır.

F. S. düzgün ve mutlak yakınsak

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ fonksiyon serisi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı

$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ ıraksak

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ noktasal yakınsak

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}}_{f_n(x)}$ $(0,\infty)$ aralığında yakınsaklığını inceleyiniz.

$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}$ $\qquad S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

$= 1 - \cancel{\frac{1}{x+1}} + \cancel{\frac{1}{x+1}} + \dots + \cancel{\frac{1}{(n-1)x+1}} - \frac{1}{nx+1}$

$= 1 - \frac{1}{nx+1}$

noktasal yakınsak

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$ $\quad$ Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon . x}\right|\right] + 1$ öyle ki $\forall n > N$

için $|S_n(x) - 1| = \left| 1 - \frac{1}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} < \frac{1}{nx} < \varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon . x}$

$S_n(x) \xrightarrow{n} 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = 1$

$C_n = \sup_{x\in(0,\infty)} |S_n(x) - 1| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{nx+1} = 1 \not\to 0$

$h'(x) = \frac{-n}{(nx+1)^2} < 0$ $\quad h(x)$ azalan

$\Rightarrow S_n(x) \overset{d}{\not\to} 1$ $\quad$ seri 1'e düzgün yakınsamaz ?

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}}_{f_n(x)}$ $[-1,1]$ aralığındaki yakınsaklığını inceleyiniz.

$f_n(x)$, $\mathbb{R}'$ de sürekli

$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$|x| \le 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$ $\qquad = x$ eğer $|x| \le 1$, ıraksak $|x| > 1$

$S_n(x) \xrightarrow{n} x$

$$C_n = \sup_{-1 \le x \le 1} |S_n(x) - x| = \max_{x \in [-1,1]} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim C_n = 0 \iff S_n(x) \xrightarrow{d.} x$$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ toplamını bulunuz.

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{2}$$

:Örnek

## Kuvvet Serileri:

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot (x-x_0)^n}_{b_n}$ , $a_n \in \mathbb{R}$ serisine kuvvet serisi denir.

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-x_0| < 1$$

$$= |x-x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = R \rightarrow \text{Yakınsaklık yarıçapı}$$

1.) Tüm $\mathbb{R}$'de yakınsak

2.) $\{x_0\}$ noktasında yakınsak

3.) $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında yakınsak

**Örnek:** $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{x^n}_{b_n}$ yakınsak eğer $|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1 \text{ yakınsak}$$

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = +\infty$ $\qquad$ $x=-1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ıraksak.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fonk. noktasal yakınsar.

$$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$C_n = \sup_{x \in (-1,1)} |S_n(x) - f(x)| = \left| \cancel{\frac{1}{1-x}} - \frac{x^n}{1-x} - \cancel{\frac{1}{1-x}} \right|$$

$$\sup_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^n}{1-x} \qquad h(x) = \frac{x^n}{1-x}$$

$$h'(x) = \frac{x^{n-1}(n-(n-1)x)}{(1-x)^2} \qquad T.N = x=1$$

K.N, $x=0$

$x = n$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $\frac{n}{n-1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

$h(-1) = \dfrac{1 \cdot |(-1)^n|}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$

$h(1) = \infty$

$h(0) = 0$

$h\left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n (n-1)$

$\lim C_n \not\to 0 \iff S_n(x)$ noktasal yakınsa

Ayrıca $S_n(x) \xrightarrow{d.} \frac{1}{1-x}$ eğer $|x| \le r < 1$

**Örnek:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-0)^n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim \left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} < 1$

$|x| < 2$

$x = 2 \Rightarrow \sum \frac{2^n}{2^n} = \sum 1$ ıraksak

$x \in (-2, 2)$ yakınsak

$x = -2 \Rightarrow \sum \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum (-1)^n$ ıraksak

$S_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^n}{1 - \frac{x}{2}}$, $|x| < 2$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^n}{1 - \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \dfrac{2}{2-x}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ serisi $f(x) = \frac{2}{2-x}$ fonksiyonuna $|x| < 2$ aralığında noktasal yakınsa

$C_n : \sup_{-2<x<2} |S_n(x) - f(x)| = \sup_{-2<x<2} \underbrace{\left| \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{2^{1-r}}{2-x} \right|}_{h(x)}$, $h(x) = \dfrac{x^n}{2^{n-1}(2-x)}$

$h'(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \left( \dfrac{n \cdot x^{n-1}(2-x) + x^n}{(2-x)^2} \right)$

$= \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{2n x^{n-1} - (n-1) \cdot x^n}{(2-x)^2}$

$= \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{x^{n-1}(2n - (n-1)x)}{(2-x)^2}$

$x = 0$, $x = \frac{2n}{n-1} > 2$ KN

$h(0) = 0$ $\quad C_n : 0 \to 0$ $\quad$ Seri $\xrightarrow{n.} \frac{2}{2-x}$

$x = 2$ T.N $\quad h(x) = \frac{2}{2-x} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n$

$\lim_{x\to 2^-} h(x) = +\infty$

## Abel Düzgün Yakınsaklık Kriteri:

$(f_n)$ ve $(g_n)$ fonksiyon dizileri $D \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olmak üzere

1.) $f_n(x)$ monoton ve düzgün sınırlı ($\exists M \in \mathbb{R}^+$ öyle ki $|f_n(x)| \leq M$ $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

2.) $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ düzgün yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ düzgün yakınsak

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{x^n}_{f_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{g_n(x)}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} g(x) =$ A.H.S Yakınsak

$f_n(x) = x^n$

$\exists M = 1 \quad |f_n(x)| = |x^n| \leq 1 \quad \forall x, \forall n$

Abel kriterinden düzgün yakınsal.

## Drichlet Kriteri:

$(f_n)$ ve $(g_n)$ $D$ üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri olmak üzere

1.) $g_n$ azalan ve $g_n \xrightarrow{d.} 0$

2.) $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$ düzgün sınırlı ise $\sum f_n(x) g_n(x)$ düzgün yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ $\quad 0 < \delta < 2x$ olmak üzere $[\delta, 2x + \delta]$

$g_n(x) = \frac{1}{n} \xrightarrow{d.} 0 \qquad f_n(x) = \sin nx$

$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx \qquad |S_n(x)| \leq n \rightarrow$ sınırlı

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin(kx) = \cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + kx\right)$$

$\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$

$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$

$$2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin x + \dots + \sin x\right) = \cos\left(-\frac{x}{2}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{3x}{2}\right)} + \cancel{\cos\left(-\frac{3x}{2}\right)} - \dots - \cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)$$

$$|S_n(x)| = \left| \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = M$$

**Tanım:** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi düzgün Cauchy'dir. Eğer $(S_n(x))$ kısmi toplamlar fonksiyon dizisi düzgün Cauchy ise.

**Teorem:** $\sum f_n(x)$ düzgün yakınsak $\Leftrightarrow$ $S_n(x)$ düzgün Cauchy

**Örnek:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ düzgün Cauchy midir? $|x|<2$

$$S_n(x) = 1 + \frac{x}{2} + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}$$

Verilen $\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>m>N$ ve $\forall x\in(-2,2)$ için $|S_n(x)-S_m(x)|<\varepsilon$

$$|S_n(x)-S_m(x)| = \left| \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^m \right|$$

$$= \frac{2}{2-x}\left| \left(\frac{x}{2}\right)^{m+n-m} - \left(\frac{x}{2}\right)^m \right|$$

$$= \frac{|x|^m}{2^m}\left| \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n-m}}{1-\frac{x}{2}} \right| < \left|\frac{x}{2}\right|^m \cdot \frac{2}{2-x}$$

$$< r^m \cdot \frac{2}{2-x} < \varepsilon$$

$$r^m < \frac{2-x}{2}\cdot\varepsilon$$

$$m > \log_{r^{-1}} \left(\frac{2-x}{2}\right)\cdot\varepsilon$$ düzgün Cauchy değil

**Weierstrass M-Test:**

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ D üzerinde tanımlı fonksiyon serisi ve $|f_n(x)| \le M_n$ koşulunu sağlayan $(M_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $(-2,+\infty)$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n} \qquad |f_n(x)| = \frac{1}{|x+2^n|} \le M_n = \frac{1}{2^n-2}$$

$$-2 < x < \infty$$
$$2^n-2 < 2^n+x < \infty$$

$$0 < \frac{1}{x+2^n} < \frac{1}{2^n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n-2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}-2} \cdot 2^n-2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = \frac{1}{2} < 1$$

O.T.'den yakınsak

W.M.T.'den düzgün yakınsak

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)^2$, $0 \le \frac{\sin^2 nx}{n^4} = |f_n(x)| \le \frac{1}{n^4} = M_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ p-test yakınsak

Seri W.M.T.'der düzgün yakınsak

**İspat:** $\sum f_n(x) \xrightarrow{d} f(x) \iff S_n(x)$ düzgün Cauchy

Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) = N$ öyle ki $\forall n > m > N$, $\forall x \in D$ için

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

$$|f_1(x) + \dots + f_n(x) - f_1(x) - \dots - f_m(x)| = |f_{m+1}(x) + \dots + f_n(x)|$$
$$\le |f_{m+1}(x) + \dots + f_n(x)|$$
$$< \sum_{k=m+1}^{n} M_k = |S_n^M - S_m^M| < \varepsilon$$

**Dini Teoremi:** $f$ sürekli, $D$ kompakt (fonksiyon dizileri için)
$(f_n)$ sürekli, monoton $\xrightarrow[D.T.]{} f_n \xrightarrow{d} f$
$f(n) \xrightarrow{n} f$

**Dini Teorem: (Seriler için):** $f_n(x)$ fonksiyon dizisi $D$ kompakt bölge üzerinde pozitif ve sürekli fonk.'lar olsun.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi sürekli olan $f(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{d} f(x)$$

**İspat:** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \xrightarrow{d} f(x) \iff S_n(x) \xrightarrow{d} f(x)$

$S_n(x) \xrightarrow{d} f(x) \xLeftarrow{\text{Dini}}$ $D$ kompakt
$S_n(x)$ sürekli
$f(x)$ sürekli
$S_n(x)$ ~~artan~~
$S_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $[0,1]$ $\xrightarrow{n.} \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ P- test yakınsak $\Rightarrow$ W.M.T.'den düzgün yakınsak

Başka yol;

$f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ $n < m \Rightarrow f_n(x) > f_m(x)$

$f_1(x) = x$ $\Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{m^2}$

$f_2(x) = \frac{x^2}{4}$ $\Rightarrow \frac{x^n}{n^2} > \frac{x^n}{m^2} > \frac{x^m}{m^2} \Rightarrow f_n(x) > f_m(x)$

azalan

$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

$= x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots + \frac{x^n}{n^2} \xrightarrow{n.} f(x)$

**Hatırlatma:** $f_n$'ler integrallenebilir ve $f_n \xrightarrow{d.} f$

$\Rightarrow f$ integrallenebilirdir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim f_n(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Şeytan merdiveni $\xrightarrow{n.}$ Dirichlet fonksiyonu
(int. bilir) (int. bilir değil)

$f_n$ diferansiyellenebilir ve $f_n \xrightarrow{d.} f \Rightarrow f$ dif. bilir

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

**Örnek:** $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{(1-(-t^2))}\,dt$ $-t^2 = u$, $|-t^2| = |u| < 1$, $|t| < 1$

$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^{2n}\,dt$

$= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots)\,dt$

$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots$

$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

$$-\frac{\ln(1-x)}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots$$

$$\int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$