# Fonksiyonlar Teorisi ve fonksiyonel Analizin Temelleri

- Metrik Uzaylar
- Baire- Kategori Teoremi
- Normlu Uzaylar
- Operatörler
- Hahn - Banach Teoremi
- Baire - Kategori Teoremi Sonuçları

  Kapalı grafik teoremi

  Açık dönüşüm teoremi

  Düzgün Sınırlılık Prensibi
- Zayıf Yakınsaklık
- Zayıf Topoloji
- Hilbert Uzayları
- Ölçüm Teorisi

8 Ekim 2019

# Vektör Uzayı:

$V \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere

$+ : V \times V \longrightarrow V$ $\qquad$ $(V,+)$ değişmeli grup
$(a,b) \longmapsto a+b$

$\cdot : F \times V \longrightarrow V$ $\qquad$ $(F,+,\cdot)$ cisim
$(\lambda, a) \longmapsto \lambda a$ $\qquad$ $\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C}$

i) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot a = \lambda_1 a \oplus \lambda_2 a$ $\qquad$ + → cisme ait, ⊕ → vektör uzayına ait

iii) $(\lambda_1 \lambda_2) a = \lambda_1 (\lambda_2 a)$

iv) $1 \cdot a = a$

koşullarını sağlıyor ise $(V,+,\cdot)$ kümesine $\mathbb{F}$ cisminin üzerinde bir vektör uzayı denir.

$\left( F(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonk.} \}, +, \cdot \right)$ , $X \neq \emptyset$ bir küme

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ , $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ , $\forall x \in X$ , $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (F(X), +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir v.u'dır.

$B(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonk} \} \subseteq F(X)$ $\qquad$ $(B(X), +, \cdot)$ vektör uzayı

Eğer $X$ kompakt topolojik uzay ise

$C(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonk.} \} \subseteq B(X) \subseteq F(X)$ v.u

**Tanım:** $(V,+,\cdot)$ bir v.u olmak üzere $W \subseteq V$ alt kümesi olsun. Eğer $(W,+,\cdot)$ v.u ise W, V'nin vektör alt uzayıdır denir. $W \leq V$ ile gösterilir.

X kompakt topolojik uzay ise $C(X) < \mathcal{B}(X) < \mathcal{F}(X)$

**Tanım:** $W < V$

$$\left( V/W = \{a+W : a \in V\}, +, \cdot \right)$$

$$(a+W) + (b+W) = (a+b) + W$$

$$\lambda(a+W) = \lambda a + W$$ şeklinde tanımlanan işlemlere göre v.u ve bölüm vektör uzayı adını alır.

**Tanım:** $(V,+,\cdot)$ v.u olmak üzere $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ kümesini alalım. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ için $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ koşulu sadece $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ olduğunda sağlanıyor ise M kümesine lineer bağımsız denir.

$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ v.u da $M = \{e_1, e_2, e_3\}$ lineer bağımsız.

$C[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonk.} \}$

$M = \{x, \cos x\}$ lineer bağımsız $\alpha_1 x + \alpha_2 \cos x = 0, \ \forall x \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$(V,+,\cdot)$ vektör uzayı olmak üzere $M = \{x_1, x_2, \dots\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. Eğer M'nin HER SONLU alt kümesi lineer bağımsız ise M lineer bağımsızdır.

$C(\mathbb{R})$ v.u da $M = \{1, x, x^2, \dots\}$ lineer bağımsız.

# $(V,+,\cdot)$ vektör uzay olmak üzere $M$ lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. Her $a \in V$ için $\exists x_1,\dots,x_n \in M$ ve $\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{F}$ var ve $a=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ şeklinde yazılıyor ise $M$ kümesi $V$'yi üretir denir.

span $M = \{ M$'nin ürettiği eleman $\} \leq V$

İddia: $(\text{Span}M,+,\cdot)$ vektör uzayıdır.

$a,b \in \text{Span}M \Rightarrow a+b \in \text{Span}M$

$\exists a_1,\dots,a_n \in F$, $\exists x_1,\dots,x_n \in M \Rightarrow a=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$\exists \mu_1,\dots,\mu_k \in F$, $\exists y_1,\dots,y_k \in M \Rightarrow b=\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i$

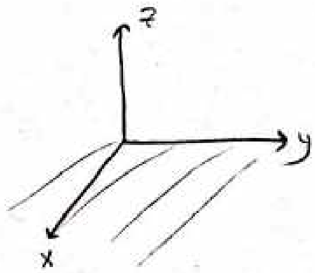
$\Rightarrow a+b=\sum_{j=1}^{n+k} \alpha_j z_j$, $0 \in \text{Span}M$, $a \in \text{Span}M$, $\lambda \in F \Rightarrow \lambda a \in \text{Span}M$

! Eğer span $M = V$ ise $M$, $V$'yi üretir denir.

ÖR: $V=\mathbb{R}^3$

$M=\{e_1,e_2\}$, $\text{Span}M=\{v\in\mathbb{R}^3 : v=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2\}$

$v=(\alpha_1,\alpha_2,0)$




$M=\{\overset{x_1}{(1,0,0)},\overset{x_2}{(2,1,0)}\}$ lineer bağımsız.

$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=0 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_1,0)+(2\alpha_2,\alpha_2,0)=(0,0,0) \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

Span $M=\{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=(\alpha_1+2\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,0)\}$

$M=\{(1,0,0),(2,0,0)\}$ lineer bağımlı

Span$M=\{(\alpha_1+2\alpha_1,0,0)\}$

**Tanım:** V vektör uzayı ve M lineer bağımsız alt kümesi olsun. Eğer $\operatorname{span} M = V$ ise M'ye V'nin cebirsel ya da hammel tabanı adı verilir.

$\mathbb{R}^3$, $M=\{e_1,e_2,e_3\}$

$P^3=\{p \text{ polinom} : \partial p<3\}$ $\quad M=\{1,x,x^2\}$

# $\emptyset \neq X$ bir küme o.ü $\leq$ bağıntısı verilsin.

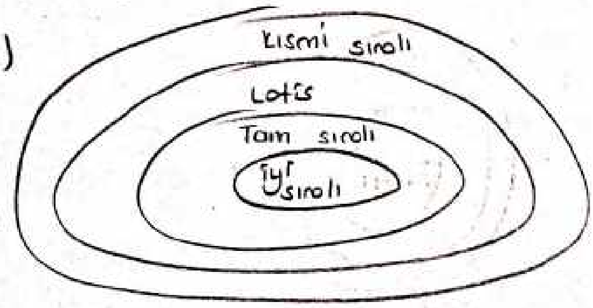
i) $\forall x\in X$ için $x\leq x$

ii) $\forall x,y\in X$ için $x\leq y$ ve $y\leq x \Rightarrow x=y$

iii) $\forall x,y,z\in X$ için $x\leq y$ ve $y\leq z \Rightarrow x\leq z$ koşullarını sağlıyor ise $\leq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı adı verilir. $(X,\leq)$ posettir.

(iii)' $\forall x,y\in X$ için $x\leq y$ veya $y\leq x$ oluyor ise $\leq$ tam sıralama bağıntısıdır denir. (Hepsi kıyaslanabilir.) $(X,\leq)$ $\quad (\mathbb{R},\leq)$

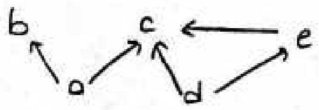
(iii)'' $(X,\leq)$ zincir o.ü X'in her alt kümesinin en küçük elemanı var ise X'e iyi sıralanmış küme denir. $(\mathbb{N},\leq)$




**Latis / Örgü:** $(X,\leq)$ posetinde her $x,y\in X$ için $x\vee y$ (inf) ve $x\wedge y$ (sup) var ise X'e latis denir.

$M\subseteq X$ alt kümesi o.ü $x\in M$ olsun. Her $m\in M$ için $m\leq x$ veya x, M elemanları ile kıyaslanamıyor ise x'e maksimal eleman denir.

Zincir varsa maximal = maksimum




$M=\{a,d,e\}$ $\quad \operatorname{Max}(H)=\{a,e\}$

$H=\{c,d,e\}$ $\quad \operatorname{Max}(H)=\{c\}$

10 Ekim 2019

*** Teorem:** Her $\phi \neq V$ vektör uzayının hammel bazı vardır.

İspat: $H_i \subset V$ lineer bağımsız alt kümesi olsun.

$(M = \{ H_i : i \in I \}, \subseteq)$ poset

Hausdorff Büyüklük İlkesinden bir $M_0 \subseteq M$ zinciri vardır.

$\bigcup_{H \in M_0} H$ elemanı $M_0$ için bir üst sınırdır. Zorn Lemmadan $M$ posetinin bir maximal elemanı vardır ve buna $B$ diyelim.

İddia: $\operatorname{span} B = V$

$\operatorname{span} B \neq V$ olsun. $\exists v \in V$ vardır öyle ki $v \notin \operatorname{Span} B$

$B' = B \cup \{v\}$ lineer bağımsızdır. $B \subseteq B'$ olur. $\lightning$ (maksimali içeren daha büyük eleman bulduk)

**Not:** $M$ cebirsel taban.

$\dim V = \#(M)$ $\quad$ V sonlu boyutlu ise $\dim V =$ M'nin eleman sayısı

$= |M|$ $\quad$ V sonsuz boyutlu ise $\dim V = \aleph_0$

$= c$

$\dim(C(\mathbb{R})) = ?$

$M = \{1, x, x^2, \dots\}$ $\quad \operatorname{Span} M \subsetneq C(\mathbb{R})$, $\quad \dim(\operatorname{Span} M) = \infty$, $\quad \dim(C(\mathbb{R})) = \infty$

$\#(M) = \aleph_0$

**Tanım:** V, W iki vektör uzayı (F üzerinde tanımlı)

$T: V \longrightarrow W$ dönüşümü olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ ise kısaca T lineer ise T'ye operatör denir.

**Ör:** $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$

$T(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = T((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) = \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2$

$= \alpha T(x) + \beta T(y)$

$\Rightarrow$ T lineer dönüşüm / operatör olur.

$T(e_1) = (1,1) = e_1 + e_2$

$T(e_2) = (1,-1) = e_1 - e_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [T]_{\beta}^{\beta}$$

ÖR: $T: C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
$f \longmapsto \int_0^1 f(x)dx$

$T(\alpha f+\beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$   yani integral / türev bir operatör.

## Topolojik Uzay

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $\tau \subseteq P(X)$ olsun.

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

iii) $I$ indis kümesi o.ü $A_i,\ i\in I \in \tau$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ koşulları sağlanıyor ise $(X,\tau)$'ya topolojik uzay denir.

$\tau = \{\emptyset, X\}$ ilkel topoloji ,   $P(X)$ ayrık topoloji

$A\in\tau$ kümesine açık küme denir.

$\mathring{A} = \mathrm{Int}(A) = \{A$'nın iç noktaları$\}$ ,   Eğer $A=\mathring{A} \Rightarrow A$ açık küme
$= \{x\in A,\ \exists U_x \in \tau : U_x \subset A\}$

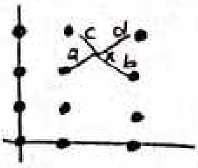
$(\mathring{A^c}) = \mathrm{Ext}(A) = \{A$'nın dış noktaları$\}$ ,   $\partial A = \{A$'nın sınır noktaları$\}$
$= \{x\in X : \forall U_x \in \tau$ için $U_x \cap A \neq \emptyset$ ve $U_x \cap A^c \neq \emptyset\}$

# $\partial A \cup \mathring{A} \cup (\mathring{A^c}) = X$

$\bar{A} = \bigcap \{A \subset C$ kapalı$\}$ $A$'nın kapanışı ,   $\bar{A} = A \Rightarrow A$ kapalı

$\partial A \subseteq A \Rightarrow A$ kapalı ,   $\bar{A} = X \Rightarrow A$ yoğun kümedir. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ uzayında $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

ÖR: $(\mathbb{R}^2, \tau_a)$   $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$




$\exists \varepsilon < \min\{|x_0-a|, |x_0-b|, |x_0-c|, |x_0-d|\}$

$B(x_0,\varepsilon) \subset A^c \Rightarrow A^c$ açık $\Rightarrow A$ kapalı

$\mathring{A} = \emptyset$ , $\partial A = A$, $\bar{A} = A$ , $\mathrm{Ext}(A) = A^c$

## Kompakt Küme:

$\{\theta_i : i \in I\}$ açık kümelerin ailesi olsun. Eğer $X \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$ ise bu aileye X'in açık örtüsü denir.
Eğer HER açık örtünün sonlu bir alt örtüsü A kümesini kapsıyor ise A'ya kompakt küme denir.

**Teorem:** Kompakt uzayın kapalı alt kümeleri kompakttır.
İspat: X kompakt olduğu HER açık örtü $\{\theta_i\}_{i\in I}$ için
$X = \theta_{i_1} \cup \theta_{i_2} \cup \dots \cup \theta_{i_n}$ , C kapalı alt küme ise $C^c$ açıktır.
Böylece $\{\theta_i\}_{i\in I} \cup \{C^c\}$ X'in açık örtüsüdür.
$X = \theta_{i_{j_1}} \cup \theta_{i_{j_2}} \cup \dots \cup \theta_{i_{j_n}} \cup C^c \Rightarrow C = \theta_{i_{j_1}} \cup \dots \cup \theta_{i_{j_n}} \Rightarrow C$ kompakttır.

15 Ekim 2019

**Tanım:** X, Y iki topolojik uzay o.ü $f: X \longrightarrow Y$ bir fonk. olsun.
Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$
Her $f(x_0)$'ın açık komşuluğu $U_{f(x_0)}$ için $\exists x_0$'ın açık komşuluğu $U_{x_0}$ vardır öyle ki; $\forall x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U_{f(x_0)}$

X, Y metrik uzay, f fonksiyonu sürekli $\Leftrightarrow$ f fonksiyonu dizisel süreklidir.
f düzgün sürekli $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ sürekli

Teorem: f fonksiyonu kompakt bölgede sürekli ise düzgün süreklidir.

**Teorem:** f sürekli bir fonksiyon o.ü $A \subset X$ kompakt olsun. $f(A) \subset Y$ kompakttır.

İspat: $f: X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyon ve $\{\theta_i : i\in I\}$ kümeler ailesi $f(A)$'nın açık örtüsü olsun, $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} \theta_i$

$f^{-1}(\theta_i)$, $i\in I$ kümeleri açık kümelerdir, çünkü $f$ sürekli

$f(A) \subset \bigcup_{i\in I} \theta_i$

(*) $A\subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
$A\subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \theta_i\right)$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\theta_i)$ $\Rightarrow \{f^{-1}(\theta_i)\}_{i\in I}$ A için açık örtüdür ve A kompakt olduğundan $A \subset f^{-1}(\theta_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(\theta_{i_n})$

$\Rightarrow f(A) \subset f\left(f^{-1}(\theta_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(\theta_{i_n})\right) \subset \theta_{i_1} \cup \dots \cup \theta_{i_n}$

! Soru: Açık / Kapalı fonksiyon $\Rightarrow$ süreklidir. (?)

## Metrik Uzaylar

$X\neq\emptyset$ bir küme olmak üzere $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonk. tanımlansın.

i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ koşulları sağlanıyor ise d'ye metrik, X'e metrik uzay denir.

Ör: $X\neq\emptyset$ bir küme

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & x\neq y \end{cases}$$ ayrık metrik olur.

$$B(x_0,\varepsilon) = \{x\in X : d(x,x_0) < \varepsilon\} = \begin{cases} \{x_0\}, & \varepsilon < 1 \\ X, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

Ürettiği topoloji ayrık topoloji.

ÖR: $X=\mathbb{R}^n$

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$$
$$(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto d(\vec{x},\vec{y})$$

$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\ , \quad d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\ , \quad d_\infty(x,y)=\sup_{1\le i\le n}\{|x_i-y_i|\}$$

$(\mathbb{R}^n,d_p)$, $1\le p\le\infty$ metrik uzaydır.

$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n\}$

$w=\{x=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots) : x_i\in\mathbb{R},\ i\in\mathbb{N}\}$ dizi uzayı denir.

$s=\{$sınırlı diziler$\}\subset w$

$c=\{$yakınsak diziler$\}\subset s\subset w$

$c_0=\{$0'a yakınsayan diziler$\}\subset c\subset s\subset w$

$X=[0,1]$ kompakt topolojik uzay

$C[0,1]=\{f: [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ sürekli$\}$

$$d_p(f,g)=\left(\int_0^1|f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad 1\le p<\infty$$

$$d_\infty(f,g)=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$$

Topoloji
Munkres



$(\mathbb{R}^n, d_p) \quad 1 \le p < \infty$

$d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p} \quad , \quad d_\infty(x,y) = \sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$

$C[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ sürekli} \} \quad , \quad d_p(f,g) = \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad 1 \le p < +\infty$

$d_\infty(f,g) = \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|$

$\left. \begin{array}{l} f(x) = x = I(x) \\ g(x) = 1 = \mathbb{1}(x) \end{array} \right\} \quad d_\infty(f,g) = \sup_{0 \le x \le 1} |x-1| = 1$

$d_{\frac{3}{2}}(f,g) = \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^{3/2} dx \right)^{2/3} =$

$= \int_1^0 \sqrt{u^3} \, (-du) = 2/5$

**Tanım:** X bir uzay o.ü $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$
$n \longmapsto f(n) = x_n$ fonksiyonuna dizi denir.

112 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \varepsilon > 0$ verilsin. $\exists N = \left[ \left| \frac{1}{\varepsilon} \right| \right] + 1$ vardır öyle ki $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n > N$
$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

201 $\lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{n}, (-1)^n \right)$ YOK! $\qquad \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) = (0,1)$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = \left[ \left| \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right| \right] + 1$ vardır öyle ki $\| x_n - (0,1) \| < \varepsilon$

$\sqrt{(1/n - 0)^2 + (1 + 1/n - 1)^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$

202 $f_n(x) = x^n \longrightarrow f(x)$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \quad ; \qquad x = 0 \, , \quad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0 = f(0)$

$x = 1 \, , \quad \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = f(1) \qquad f(x) = \begin{cases} 0 \, , & 0 \le x < 1 \\ 1 \, , & x = 1 \end{cases}$

$0 < x < 1 \, , \quad \lim_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$

$f_n \xrightarrow{n} f \quad , f(x)$ sürekli değil. O halde $f_n \not\rightarrow f$

**Tanım:** $(x_n) \subset (X,d)$ bir dizi olsun.

- $\lim x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $d(x_n, x) < \varepsilon$

**Tanım:** $(x_n) \subset (X,d)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ var ve $\forall n > m > N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ koşulu sağlanıyor ise $(x_n)$'e Cauchy dizisi denir.

Yakınsak $\Rightarrow$ Cauchy
$\not\Leftarrow$

Yakınsak $\iff$ Cauchy

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
$P_4 = \{ f(x) : \partial f = 4 \}$
$\dim V = n$

Cauchy $\Rightarrow$ Sınırlı
$\not\Leftarrow$ $(-1)^n$

**Tanım:** Bir $(X,d)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X,d)$ tam metrik uzay olarak adlandırılır.

**Örnek:** $(C[0,1], d_1)$ tam değildir.

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$f_n(x) = x^n$ verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\left| \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right|\right] + 1$ vardır öyle ki $\forall n > m > N$ için $d_1(f_n, f_m) < \varepsilon$

$$d_1(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \int_0^1 |x^n - x^m|\, dx = \int_0^1 (x^m - x^n)\, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m+1} < \varepsilon$$

$n+1 > m+1$ $\qquad m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$\frac{1}{m+1} > \frac{1}{n+1}$

$f_n \xrightarrow{n.} f$ fakat $f \notin C[0,1]$

$\Rightarrow (C[0,1], d_1)$ tam değildir.

**Lemma:** $(C[0,1], d_\infty)$ tamdır. $\big((B[0,1], d_\infty)$ tamdır.$\big)$

İddia: Her Cauchy dizisi yakınsaktır.

$(f_n)$ Herhangi bir Cauchy dizisi olsun.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > m > N$ iken $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$

$\sup\limits_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$ için

Her $x \in [0,1]$, $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ bir Cauchy dizisidir.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = a_x \in \mathbb{R}$ vardır. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$f_n \xrightarrow{d} f \iff c_n := \underbrace{\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)|}_{= d_\infty(f_n, f)} \longrightarrow 0$$

$d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$

I. yol: $d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$

II. yol: $f$ süreklidir.

Herhangi bir $x_0 \in [0,1]$ alalım.

<u>İddia:</u> $f$ fonk. $x_0$'da süreklidir.

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ öyle ki $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\text{nok. yakınsak}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\text{sürekli}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\text{nok. yakınsaklık}}$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$c_0$ ve $c_{00}$ karşıt örnek

I. 7 Kasım
II. 19 Aralık

22 Ekim 2019

Baire Kategori Teoremi:

X tam bir metrik uzay ve X sayılabilir tane kümelerin birleşimi şeklinde yazılabilsin.

$X=\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i$ kapalı

O halde en az bir tane $C_i$ kümesinin iç noktası vardır.

2. ifade: Tam metrik uzaylar ikinci kategoridir.

Tanım: $M \subset X$ alt kümesi olsun. $\mathring{\overline{M}} = \emptyset$ ise M'ye megger / seyrek küme denir.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathring{\overline{\mathbb{N}}} = \mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$

$d = \{x=y\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathring{\overline{d}} = \mathring{d} = \emptyset$

Eğer $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ ve $M_i$ seyrek kümeler ise X'e 1. kategori aksi durumda 2. kategori denir.

$(C[0,1], d_\infty)$, $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $(\mathbb{C}^n, d_p)$ $\longrightarrow$ 1. kategori uzaylar

$\mathcal{L}_p(X) = \{ f: X \longrightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ X üzerinde integrallenebilir} \}$

$(\mathcal{L}_p, d_p)$ tam metrik uzay

$X=(1,\infty)$ $\quad \left.\begin{matrix} \mathcal{L}_1((1,\infty)) \\ \cap \\ \mathcal{L}_2((1,\infty)) \end{matrix}\right\}$ $\quad y=\frac{1}{x}$ $\quad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$

$w = \{\text{dizi uzayı}\} = w(X) = \{ f: \mathbb{N} \longrightarrow X,\ n \longmapsto a_n \} = \{ f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ fonk} \}$

$w \supset s = \{\text{sınırlı diziler}\}$

$w \supset s \supset c = \{\text{yakınsak diziler}\} = \{ (a_n) \in w : \lim a_n \text{ var} \}$

$w \supset s \supset c \supset c_0 = \{\text{sıfıra yakınsayan diziler}\} = \{ (a_n) \in w : \lim a_n = 0 \}$

$w \supset s \supset c \supset c_0 \supset c_{00} = \{\text{sonlu terim hariç tüm terimleri sıfır}\}$

$a_n = (a_1, a_2, 0, 0, \dots)$

$b_n = (0, 0, \dots, a_{10\dots}, a_{10\dots+1}, 0, 0, \dots)$

$\ell_\infty = s = \{ (a_n) : m \leq a_n \leq M \ , \forall n \}$

$= \{ (a_n) : 0 \leq |a_n| \leq C \ , \forall n \}$

$= \{ (a_n) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = L$ var $\}$

$(\ell_\infty, d_\infty)$ metrik uzayı

$\ell_p = \{ (a_n) : \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < +\infty \}$

$\ell_1 = \{ (a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \}$

$d_p(a,b) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p \right)^{1/p}$

<u>İddia:</u> $(\ell_\infty, d_\infty)$ uzayı tam metrik uzaydır.

$(a_n) \subset \ell_\infty$ bir Cauchy dizisi olsun.

$a_1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_n^1, \dots)$

$a_2 = (a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2, \dots)$

$\vdots$

$a_N = ( \qquad )$

$\vdots$

$a_n = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n, \dots)$

$a_m = (a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m, \dots)$

$a_k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k, \dots)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > m > N$ için $d_\infty(a_n, a_m) < \varepsilon$

$d_\infty(a_n, a_m) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k^n - a_k^m| < \varepsilon \Rightarrow$ Her $k \in \mathbb{N}$ için $|a_k^n - a_k^m| < \varepsilon$ olur.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N =$ öyle ki $\forall n > m > N$ için $|a_k^n - a_k^m| < \varepsilon$

$\Rightarrow (a_k^n) \subset \mathbb{R}$ Cauchy dizisidir. $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_k^n) = \xi_k$ vardır ve

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ dizisi elde edilir.

İddia: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \zeta$

Verilen $\varepsilon>0$, $\exists N = N'$ öyle ki $\forall n>N$ için $\underbrace{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k^n - \zeta_k|}_{= \, d_\infty(a_n,\zeta)} < \varepsilon$

İddia: $\zeta \in \ell_\infty$

$|\zeta_k| \leq |\zeta_k - a_k^n| + |a_k^n|$

$\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\zeta_k| \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left( |\zeta_k - a_k^n| + |a_k^n| \right) \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\zeta_k - a_k^n| + \underbrace{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k^n|} < \varepsilon + L$

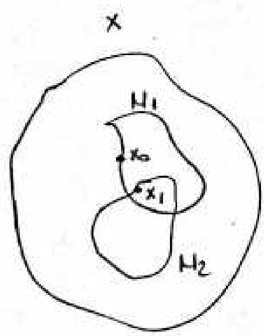
$\Rightarrow \zeta \in \ell_\infty$

<u>BKT</u> Tam metrik uzay 2. kategoridir.

İspat: $(X,d)$ tam ve 1. kategori olsun.

Yani $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i$, $\overline{H_{i_0}} = H_i$ ve $\mathring{H}_i = \emptyset$ olsun.

Her $i\in\mathbb{N}$ ve her $x\in X$ için $\mathring{H}_i = \emptyset \Rightarrow B(x,\varepsilon)\cap H_i = \emptyset$ ve $B(x,\varepsilon)\cap H_i^c = \emptyset$




$x_0 \in X$ ve $\varepsilon_0>0$ olsun öyle ki $x_1 \in B(x_0,\varepsilon_0)\cap H_1 \neq \emptyset$

Bir tane $\frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_1 > 0$ vardır öyle ki $x_2 \in B(x_1,\varepsilon_1)\cap H_2 \neq \emptyset$

$\vdots$ Tümevarım ile

$x_n \in B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap H_n \neq \emptyset$ $\qquad \varepsilon_{n-1} = \frac{\varepsilon_{n-2}}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow (x_n)$ dizisi oluşturulur.

İddia: $(x_n)$ Cauchydir.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N = \left[\!\left[ \log_2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$ öyle ki $\forall n>m>N$ için $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

$d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon_0}{2^n} < \varepsilon$ ve $X$ tam olduğundan $(x_n)$ yakınsaktır.

$\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olsun.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$ öyle ki $\forall n>N$ için $d(x_n, z) < \varepsilon$

$z \in B(x_n, \varepsilon) \subset B(x_N, \varepsilon) \ldots \subset B(x_0, \varepsilon)$

$z \in X \setminus H_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (X\setminus H_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ $\lightning$

24 Ekim 2019

**Tanım:** $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ metrik uzaylar o.ü $f: X \longrightarrow Y$ bir fonk. olsun. Verilen $\varepsilon>0$, $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ öyle ki $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ $[x \in B_X(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)]$ koşulu sağlanıyor ise $f$ fonk. $x_0$'da süreklidir denir.

Verilen $\varepsilon>0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ öyle ki $\forall x, y \in X$ için $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ise $f$'e düzgün sürekli denir.

düzgün sürekli $\Rightarrow$ sürekli

**Lemma:** $f$ sürekli ve $X$ kompakt ise $f$ düzgün sürekli olur.

**Teorem:** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

i) $X$ kompakttır.

ii) $X$ dizisel kompakttır.

- $X$ kompakt $\forall (\theta_i)_{i\in I}$ açık örtüsü için $\theta_{i_1} \cup \theta_{i_2} \cup \ldots \cup \theta_{i_n} = X$
- $X$ dizisel kompakt eğer $X$'in her $(x_n)$ dizisi için bir tane yakınsak alt dizisi varsa.
- $K \subset X$ alt kümesi dizisel kompakttır eğer $x \in K$ için $\exists (x_n) \subset K$ öyle ki $x_{n_k} \longrightarrow x$

24 Aralık 2. Vize
7 Kasım I. Vize

**Lemma:** $f: (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ bir fonk. olsun.

$f$ süreklidir $\Longrightarrow$ $f$ dizisel süreklidir.
(her zaman)

$\Longleftarrow$ (metrik)

• $f$ dizisel süreklidir, $x_n \xrightarrow{d_X} x_0$ için $f(x_n) \xrightarrow{d_Y} f(x_0)$

$I: (\mathbb{R}, \tau_{st}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ dizisel sürekli ama sürekli değil.
$x \longmapsto x = I(x)$

$(0,1)$ açık kümesi $\in (\mathbb{R}, \tau_{|.|})$

$I^{-1}((0,1)) = (0,1) \notin \tau_{st}$ çünkü $(0,1)^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ sonlu değildir.

$x_n \xrightarrow{\tau_{st}} x_0$, $\forall x_0 \in U_{x_0}$ için $\exists N$ öyle ki $\forall n > N$ iken $x_n \in U_{x_0}$

$U_{x_0}^c = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

en azından $x_n = x_0$ sonlu $n$ hariç $I(x_n) = x_n \xrightarrow{\tau_{|.|}} x_0$

---

$\emptyset \neq X$ küme o.ü $d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$
!
$(x,y) \longmapsto d(x,y)$

**Normlu Uzaylar:** $X$ bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı o.ü
!
$\|.\|: X \longrightarrow [0, \infty)$ fonk. olsun.

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$ $\forall x \in X$, $\forall a \in \mathbb{F}$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in X$ koşulları sağlanıyor ise $(X, \|.\|)$ normlu uzay denir.

$\{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\} = B(x_0, \varepsilon)$

Normlu uzay $\Rightarrow$ metrik uzay $\Rightarrow$ Topolojik uzay

$\not\Leftarrow$ (ayrık metrik)

$d(x,y) = \|x-y\|$

i) $d(x,y) = 0 = \|x-y\| \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

ii) $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \|y-x\| = d(y,x)$

iii) $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \leq d(x,z) + d(y,z)$

Örnek: • $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$

$\|x\|_p = \|x-0\|_p = d_p(x,0) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$

• $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

• $(C[0,1], \|.\|_p)$

$\|f\|_p = d_p(f,0) = \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ $\quad \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$

• $(L_p[0,1], \|.\|_p)$

$(\ell_p, \|.\|_p)$ $\quad \|x\|_p = d_p(x,0) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$ normlu uzay örnekleridir.

Tanım: Normlu uzay bir tam uzay ise Banach uzayı adını alır.

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$

$(C[0,1], \|.\|_\infty)$

$(\ell_p, \|.\|_p)$ $\quad 1 \leq p < \infty$

$(L_p, \|.\|_p)$ $\quad 1 < p \leq +\infty$

Örnek: $\left(L_1[0,1], \|\cdot\|_1\right)$ Banach uzayıdır.

• İddia: Normlu uzaydır.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \geq 0$$

$$\|f\|_1 = 0 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \iff |f(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1] \iff f = 0$$

$$\|af\|_1 = \int_0^1 |af(x)|\,dx = |a|\,\|f\|_1$$

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 \left(|f(x)| + |g(x)|\right)dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

• İddia: Tam uzaydır.

$(f_n) \subset L_1[0,1]$ Cauchy olsun.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > m > N$ için $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow (f_n(x)) \subset \mathbb{R} \text{ Cauchy}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = a_x = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

• İddia: $f \in L_1[0,1]$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 \left(|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|\right)dx \leq \int_0^1 \varepsilon\,dx + \|f_n(x)\|_1$$

$$= \varepsilon + \|f_n\|_1 < +\infty$$

**Tanım:** $(X, \|.\|_1)$ ve $(X, \|.\|_2)$ normlu uzay olsun. En az bir $m, M \in \mathbb{R}_+$ var ve $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ koşulu sağlanıyor ise bu iki norm denktir denir.

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ $1 \leq p \leq +\infty$ denktir.

$\frac{1}{n^2} \in$
$$\ell_1 = \{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty \}$$
$1/n \notin$

$(\ell_1, \|.\|_1)$ ve $(\ell_1, \|.\|_\infty)$ denk değildir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow (x_n) \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \text{sınırlı}$$

İddia: İki norm denk değildir.

$$\underset{\sup_n |x_n|}{\|x\|_\infty} \leq \underset{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|}{\|x\|_1} \quad \checkmark$$

$\exists M$, $\|x\|_1 \leq M\|x\|_\infty$ koşulunu sağlayan bir M yoktur.

$k \geq 1 \in \mathbb{N}$ o.ü. $\quad r_k = 1 - \frac{1}{k} < 1$

$$x = (x_n) = (r_k^n) = \left(1, 1 - \frac{1}{k}, \dots\right)$$

$$\|x\|_\infty = 1$$

$$k = \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} r_k^n = \frac{1}{1 - r_k} = \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{k}} = k$$

**Hölder Eşitsizliği:** $x \in \ell_p$, $y \in \ell_p$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise $x.y \in \ell_1$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}$$

**İspat:** $f(x)=x^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1$, $0<a$, $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli, $(a,b)$ türevli

$\Rightarrow$ ODT'den $\exists c \in (a,b)$ öyle ki $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

$$\Rightarrow \frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{b-a} = (1-\alpha).c^{-\alpha} < (1-\alpha).a^{-\alpha} \qquad \left(\begin{array}{c} 0<c<b \\ b^{-\alpha}<c^{-\alpha}<a^{-\alpha} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} < (1-\alpha)\, b.a^{-\alpha} - (1-\alpha).a^{1-\alpha} \, / a^{\alpha}$$

$$\Rightarrow b^{1-\alpha} a^{\alpha} - a < (1-\alpha) b - (1-\alpha) a$$

$$\Rightarrow b^{1-\alpha}.a^{\alpha} < (1-\alpha) b + \alpha a$$

$\alpha = \frac{1}{p}$, $1-\alpha = \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\qquad b^{\frac{1}{q}} a^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{q} b + \frac{1}{p} a$ $\quad$ (*)

$x=(x_n) \in \ell_p$, $y=(y_n) \in \ell_p$, $a = \dfrac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p}$, $b = \dfrac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q}$

(*)'da yerine koyarsak, $\dfrac{|y_n||x_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \dfrac{|x_n y_n|}{\|x\| \|y\|_p} < \dfrac{1}{p} \dfrac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \dfrac{1}{q} \dfrac{|y_n|^p}{\|y\|_q^q}$

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} |x_n y_n| < \frac{1}{p} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{|y_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \frac{1}{p \cancel{\|x\|_p^p}} \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} + \frac{1}{q \cancel{\|y\|_q^q}} \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p$$

$$\frac{\|xy\|_1}{\|x\|_p \|y\|_q} < 1/p + 1/q = 1 \Rightarrow \|xy\|_1 < \|x\|_p \|y\|_q$$

$$\Rightarrow xy \in \ell_1$$

**Minkowski Eşitsizliği:** $1<p<+\infty$, $x,y\in \ell_p$ $\quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|\,|x_n+y_n|^{p-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n|\,|x_n+y_n|^{p-1} + |y_n|\,|x_n+y_n|^{p-1}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n z_n|$ $\quad z_n = (x_n+y_n)^{p-1}$

$x=(x_n)\in \ell_p$

$z=(z_n)\in \ell_p$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p < +\infty$$

$p+q=pq$

$\Rightarrow p = pq-q$

$=(p-1)q$

Böylece Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n z_n| = \|xz\|_1 \leq \|x\|_p \|z\|_q$$

$$\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p\|z\|_q + \|y\|_p\|z\|_q$$

$$\leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\,\|z\|_q$$

$$\|z\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^q\right)^{1/q} = \left(\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/q}$$

$$= \left(\|x+y\|_p^p\right)^{1/q}$$

Buradan, $\left(\|x+y\|_p^p\right)^{1-1/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ $\quad (1-1/q = 1/p)$

$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ elde edilir.

* **Teorem:** V sonlu vektör uzayı olsun. Üzerinde tanımlanan tüm normlar birbirine denktir.

**İspat:** $(V, \|.\|)$ normlu uzay $\dim V = n$ olduğundan bazı vardır.

$\exists \{x_1, \dots, x_n\} = \beta$ öyle ki $\forall x \in V$ için $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$(V, \|.\|_1)$ , $\|x\|_1 = |a_1| + \dots + |a_n|$

$V \cong \mathbb{F}^n$

$T: (V, \|.\|_1) \longrightarrow (\mathbb{F}^n, \|.\|_1)$

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = x \longmapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 1-1 ve örten.

T $x_0$'da süreklidir: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ öyle ki $\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_1 < \varepsilon$

$$\|Tx - Tx_0\|_1 = \|(a_1, \dots, a_n) - (a_1^0, \dots, a_n^0)\|_1 = \|(a_1 - a_1^0), \dots, (a_n - a_n^0)\|_1 = |a_1 - a_1^0| + \dots + |a_n - a_n^0|$$
$$= \|x - x_0\|_1 < \varepsilon$$

$S = \{x \in \mathbb{F}^n : \|x\|_1 = 1\}$ kompakt $S \subset \mathbb{F}^n$

$T^{-1}(S) \subset (V, \|.\|_1)$ kompakttır.

$T^{-1}(S) = \{v \in V : \|v\|_1 = 1\} \subset (V, \|.\|_1)$ kompakttır.

$f: (V, \|.\|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad v \longmapsto \|.\|$

$f$ fonksiyonu $x_0$'da süreklidir.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta = \varepsilon$ öyle ki $\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = |\,\|x\| - \|x_0\|\,| \le \underbrace{\|x - x_0\| \le \|x - x_0\|_1}_{\text{Her zaman var.}} < \varepsilon = \delta$$

$f : T^{-1}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli

kompakt olduğundan

(Max-min teo)

$m \leq f(T^{-1}(S)) \leq M$ sınırlıdır.

$$m = \min_x \{ f(x) : x \in T^{-1}(S) \}$$

$$= \min_x \{ f(x) : \|x\|_1 = 1 \}$$

$$= \min_x \{ \|x\| : \|x\|_1 = 1 \}$$

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x\|_1$$

Buradan $\|x\|_1$ ve $\|x\|$ denk normlardır. Böylece $\|x\|$ tüm normlarla denk olur.

5 Kasım 2019

**OPERATÖRLER:**

**Tanım:** $V$ ve $W$ iki vektör uzayı o.ü $T : V \longrightarrow W$ bir dönüşüm olsun.

$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty \quad \forall x,y \in V, \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{F}$ koşulu sağlanıyor ise

($T$ lineer ise) $T$'ye operatör denir.

$(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ iki normlu uzay olsun, $T : X \longrightarrow Y$ operatör.

$T$, $x_0 \in X$ noktasında süreklidir eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ öyle ki $\|x - x_0\|_X < \delta$

$\Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$

**ÖR:** $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+y,\ x-y)$ operatördür. $T$ operatörü $\vec{p_0} = (1,1)$'de sürekli midir?

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta' = \frac{\varepsilon - 2}{2}$ seçelim öyle ki $\|p - p_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|Tp - Tp_0\|_\infty < \varepsilon$

$$\|Tp - Tp_0\|_\infty = \|(x+y,\ x-y) - (2,0)\| = \max\{|x+y-2|,\ |x-y|\} \leq \max\{|x-1| + |y-1|,\ |x| + |y|\}$$

$$\overset{\circledast}{\leq} \max\{2\delta,\ 2(\delta+1)\}$$

$$= 2(\delta+1)$$

$\circledast$ $\|(x,y) - (1,1)\|_2 < \delta$

$$\begin{matrix}|x-1| \\ |y-1|\end{matrix} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta \Rightarrow \begin{matrix}|x| < \delta + 1 \\ |y| < \delta + 1\end{matrix}$$

$T$ operatörü sınırlıdır eğer $\exists M > 0$ öyle ki $\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$, $\forall x \in X$

Aynı örnek için, $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+y,\ x-y)$ sınırlı mıdır?

$\exists\, 2 = M > 0$ öyle ki $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için $\|Tp\|_1 = |x+y| + |x-y| \leq M(|x| + |y|) = M.\|p\|_1$

$$|x+y| + |x-y| \leq |x| + |y| + |x| + |y| \leq 2.(|x| + |y|)$$

**ÖR:** $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $|Tx| = |Ix| = |x| \leq 1.|x|$ birim operatörü sınırlıdır.

**ÖR:** $T: C'[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$f \longmapsto T_f = f'$

$x^n \longmapsto Tx^n = n.x^{n-1}$

$\forall f,\ \|Tf\|_\infty \leq M.\|f\|_\infty$

Fakat, $f(x) = x^n$

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |n.x^{n-1}| = n \leq M.\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1$$

Türev operatörü sınırsızdır.

**Teorem:** $T: X \longrightarrow Y$ operatör, $X$ ve $Y$ iki normlu uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $T$ sınırlıdır.

ii) $T$ düzgün süreklidir.

iii) $T$ süreklidir.

iv) $T$ 0'da süreklidir.

İspot: $ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv$ zaten elimizde var.

$(i \Rightarrow ii)$ $\exists M \in \mathbb{R}_+$ öyle ki $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ $\forall x \in X$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon / M$ öyle ki $\forall x, y \in X$ için $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| < \varepsilon$

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq M. \|(x-y)\| < M.\delta = \varepsilon$$

$(iv \Rightarrow i)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ öyle ki $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < \varepsilon$

Özel olarak $\varepsilon = 1$ alalım. $\exists \delta > 0$ öyle ki $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < 1$

Herhangi $y \in X$ alalım. $x = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|}$ elemanının $\|x\| < \delta/2 < \delta$

$$\Rightarrow \|Tx\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) \right\| < 1 \Rightarrow \left\| \frac{\delta}{2\|y\|} Ty \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| < 1 \Rightarrow \|Ty\| < \overset{M}{\left(\frac{\delta}{2}\right)} \|y\|$$

**Tanım:** $T: X \longrightarrow Y$ operatör olsun.

$\|T\| = \inf \{ M > 0, \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X \}$ değerine operatörün normu denir.

<u>Örnek</u>: $T: C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)dx$$

$\lambda f + \mu g$ sürekli $\Rightarrow$ int.bilir $\int_0^1 (\lambda f + \mu g)(x) dx$

$$T: (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$f \longmapsto Tf =$$

$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad |Tf| \leq M.\|f\|_\infty$

$$|Tf| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx \leq \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \forall f \in C[0,1]$ için $\quad |Tf| \leq 1.\|f\|_\infty \Rightarrow T$ sınırlı

$\|T\| = ?$ Bir tane $f \in C[0,1]$, $\|f\|_\infty = 1$ öyle ki $|Tf| = 1$

$f(x) = 1$ sbt fonk. $\|f\|_\infty = 1 \quad |Tf| = 1 \Rightarrow |Tf| = \|f\|_\infty \Rightarrow \|T\| = 1$

**Örnek:** $T: \ell_1 \longrightarrow \ell_\infty$
$$(x_n) \longmapsto (x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+\cdots+x_n, \ldots)$$

$x = (x_n) \in \ell_1$, $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ olsun. $y = Tx = (x_1+x_2+\cdots+x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$

$$\|Tx\|_\infty = \sup_n |y_n| = \sup_n (|x_1+\cdots+x_n|) \leq \sup_n (|x_1|+\cdots+|x_n|) \leq \sup_n \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\right) \leq \sup_n (\|x\|_1)$$
$$= \|x\|_1 < +\infty \Rightarrow \|Tx\|_\infty \leq 1.\|x\|_1, \quad \forall x \in \ell_1 \Rightarrow T \text{ sınırlı}$$

$\|T\| = 1 \quad x = (1,0,0,\ldots) \in \ell_1$

$\|x\|_1 = 1$

$Tx = (1,1,1,\ldots) \Rightarrow \|Tx\|_\infty = 1$

$\exists x = e_1$ için $\|Tx\|_\infty = \|x\|_1 = 1 \Rightarrow \|T\| = 1$

**Örnek:** $T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$
$\forall p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $\|Tp\|_1 \leq 2.\|p\|_1$

$\exists p = (1,0)$, $\|p\|_1 = 1 \quad \|Tp\|_1 = 2 \Rightarrow \|Tp\|_1 = 2\|p\|_1$

$\|T\| = 2$

$$T: (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$

$\|Tp\|_\infty \leq M\|p\|_\infty$ , $\forall p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\|Tp\|_\infty = \max\{|x+y|, |x-y|\} \leq M. \max\{|x|, |y|\}$$
$$\text{/\!\!\wedge}$$
$$\max\{|x|+|y|, |x-y|\} = |x|+|y| \leq \max\{|x|, |y|\} + \max\{|x|, |y|\}$$
$$\leq 2\max\{|x|, |y|\}$$

$\Rightarrow \|Tp\|_\infty \leq 2.\|p\|_\infty \Rightarrow T$ sınırlı

$$\left.\begin{array}{ll} p = (1,-1) & \|p\|_\infty = 1 \\ Tp = (0,2) & \|Tp\|_\infty = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow {}_\infty\|Tp\|_\infty = 2$$

${}_\beta[T]_\beta = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad {}_1\|T\|_1 = {}_1\|A\|_1 = \max\{\text{sütun top.}\} = \max\{1+1, 1+|-1|\} = 2$

${}_\infty\|T\|_\infty = \max\{\text{satırların toplamı}\} = 2$

---

Sütun normu: $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Satır normu: $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Toplam normu: $\|A\|_t = n. \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$

Frobenius normu: $\|A\|_F = \left( \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$

Teorem: T sınırlı operatör olsun.

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in X}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\} \qquad A$$

$$= \sup_{x\in \bar{B}_X} \left\{ \|Tx\| , \ x\in X \ \text{ve} \ \|x\|\le 1 \right\} \qquad B$$

$$= \sup_{x\in \partial_{B_X}} \left\{ \|Tx\| \ ; \ x\in X \ \text{ve} \ \|x\| = 1 \right\} \qquad C$$

İspot: T sınırlı ise $\|Tx\| \le M . \|x\| \Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le M \ , \forall x$

$$\Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \inf M = \|T\| \ , \forall x \qquad \Rightarrow \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = A \le \|T\|$$

⊛ $\|T\| \le C \le B \le A \le \|T\|$

$0 \neq x \in X$ ve $\|x\| \le 1$ ololım.

$$\|Tx\| = \|x\| . \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le A . \|x\| \le A$$

$$\Rightarrow B = \sup_{x\in \bar{B}_X} \{\|Tx\|\} \le A$$

$$C = \sup_{x\in \partial_{B_X}} \{\|Tx\|\} \le \sup_{x\in \bar{B}_X} \{\|Tx\|\} = B$$

Herhangi $x \neq 0 \in X$ için $y = \frac{x}{\|x\|}$ ololım. $\|y\| = 1$

$$\|Ty\| \le C \Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le C \Rightarrow \|Tx\| \le C\|x\| \ , \quad C \text{ üst sınır.}$$

$$\inf M = \|T\| \le C$$

$X, Y$ normlu uzay

$$\begin{cases} L(X,Y) = \{ T: X \longrightarrow Y : T \text{ lineer} \} \\ B(X,Y) = \{ T: X \longrightarrow Y : T \text{ lineer, sınırlı} \} \end{cases}$$

$L(X,Y) = \{ T: X \longrightarrow Y : \text{sınırlı operatör} \}$

$(L(X,Y), +, \cdot)$ $\quad (T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x$

$(\lambda T)(x) = \lambda Tx = T(\lambda x)$ $\quad$ vektör uzayı

$(L(X,Y), \|.\|)$ normlu uzaydır. $\quad \cdot \ \|T\| \geq 0$

↳ operatör normu

$\|T\| = 0 \iff \inf H = 0$

$\iff \|Tx\| \leq H \|x\|$

$\iff \|Tx\| = 0, \ \forall x$

$\iff Tx = 0, \ \forall x$

$\iff T = 0$

- $\|\lambda T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{ \|(\lambda T)x\| \} = \sup\limits_{\|x\|=1} \{ |\lambda| \|Tx\| \} = |\lambda| \sup\limits_{\|x\|=1} \{ \|Tx\| \} = |\lambda| \|T\|$

- $\|T_1 + T_2\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \{ \|(T_1 + T_2)x\| \} = \sup\limits_{\|x\|=1} \{ \|T_1x + T_2x\| \} \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \{ \|T_1x\| + \|T_2x\| \} = \|T_1\| + \|T_2\|$

Teorem: Eğer $Y$ Banach uzayı ise $L(X,Y)$ Banachtır.

İspat: $(T_n) \subset L(X,Y)$ bir Cauchy dizisi olsun.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ öyle ki $\forall n > m > N$ iken $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$

$\|T_n - T_m\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_nx - T_mx\| < \varepsilon \implies \|T_nx - T_mx\| < \varepsilon, \ \forall x \in \overline{B}_X$

$\Rightarrow \underset{y_n}{\underset{\|}{(T_nx)}} \subset Y$ Cauchy $\forall x \in X$

$Y$ Banach olduğundan $Y \ni y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_nx$ vardır.

$T$ dönüşümü $Tx = y = \lim\limits_{n\to\infty} T_nx$ $\quad T$ operatör!

İddia: T sınırlıdır.

$$\|Tx\| = \|Tx - T_nx + T_nx\|$$
$$\leq \|Tx - T_nx\| + \|T_nx\|$$
$$\leq \varepsilon.\|x\| + M_n\|x\|$$
$$\leq (\varepsilon + M_n)\|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow T \in L(X,Y)$$

## Dual Uzay

$X' = \{ f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ sınırlı operatörler $\} = L(X,\mathbb{R})$

$X'$ her zaman Banachtır.

Lemma: T sınırlı ve ($T^{-1}$ var ve sınırlı) olsun. Bu durumda

$\exists m, M > 0$ öyle ki $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ , $\forall x$

İspat: T sınırlı $\Rightarrow \exists M$ öyle ki $\|Tx\| \leq M\|x\|$

$$\|T^{-1}Tx\| = \|x\| \leq \|T^{-1}\| \, \|Tx\| \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\|T^{-1}\|}}_{m} \|x\| \leq \|Tx\|$$

Teorem: X ve Y normlu uzayın topolojik eşyapılı olması için gerek ve yeter koşul $\exists m, M > 0$ , $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ , $\forall x \in X$ koşulunu sağlayan örten bir $T: X \longrightarrow Y$ operatörün olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ $T: X \longrightarrow Y$ örten

1-1 $Tx = Ty \Rightarrow x = y$

$T(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$

T 1-1'dir eğer $\ker T = \{0\}$

$x \neq 0$ için $Tx = 0$ olsun. Böylece $\|Tx\| = 0$ fakat $\|x\| \neq 0$

$0 \neq m\|x\| \leq 0$ ↯ O halde $T^{-1}$ var.

$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \Rightarrow T$ sınırlı

$\|T^{-1}y\| = \|T^{-1}Tx\|$ $\quad \exists x \in X$ vardır öyle ki $\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Tx\| \leq C\|y\|$

$\Rightarrow T^{-1}$ sınırlı

14 Kasım 2019

$1 < p < +\infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\ell_p' = \ell_q$

$T: \ell_q \longrightarrow \ell_p'$

Fix $a \in \ell_q$ ve her $x \in \ell_p$

Hölderden $\underset{(a_n x_n)}{\overset{\shortparallel}{ax}} \in \ell_1 \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| < +\infty}_{\text{mutlak yakınsak}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < +\infty$ yakınsak

$f_a: \ell_p \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$

$f_a(\lambda x + y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda x_n + y_n) = \lambda f_a(x) + f_a(y)$

$\Rightarrow f_a$ lineer

İddia: $f_a$ sınırlı

$x \in \ell_p$ o.ü $|f_a(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| = \|ax\|_1 \leq \|a\|_q \|x\|_p \Rightarrow \|f_a\| \leq \|a\|_q$

$\Rightarrow f_a$ sınırlı

$\Rightarrow f_a \in L(\ell_p, \mathbb{R}) = \ell_p'$

İddia: $\|f_a\| = \|a\|_q$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in \ell_q$ $\quad \beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ öyle ki $\beta_n = \begin{cases} \frac{|a_n|^q}{a_n}, & a_n \neq 0 \\ 0, & a_n = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \beta \in \ell_p$ olur.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{|a_n|^q}{a_n}\right|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^{pq}}{|a_n|^p} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{pq-p}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < +\infty \quad a \in \ell_q$

$u_k = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_k e_k \qquad k \in \mathbb{N}$

$u_1 = (\beta_1, 0, 0, \dots)$
$u_2 = (\beta_1, \beta_2, 0, 0, \dots)$
$\vdots$
$u_k = (\beta_1, \dots, \beta_k, 0, \dots) \quad \in l_p$

$$|f_a(u_k)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n^k a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{k} \beta_n a_n\right| = \sum_{n=1}^{k} |a_n|^q$$

$$\Rightarrow |f_a(u_k)| = \sum_{n=1}^{k} |a_n|^q \le \|f_a\| \, \|u_k\|_p$$

$$\|u_k\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^k|^p = \sum_{n=1}^{k} |\beta_n|^p$$

$$\|u_k\|_p = \left(\sum_{n=1}^{k} \left|\frac{|a_n|^q}{a_n}\right|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \le \|f_a\| \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q}\right)^{q/p}$$

$$\Rightarrow \|a\|_q^q \le \|f_a\| \, \|a\|_q^{q/p}$$

$$\Rightarrow \|a\|_q = \|a\|_q^{q - q/p} \le \|f_a\|$$

$$\Rightarrow \|f_a\| = \|a\|_q$$

$T: l_q \longrightarrow l_p'$
$\quad a \longmapsto f_a = Ta$

$Ta = f_a \in l_p' = l_p \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad\qquad\qquad x \longmapsto$

$$(Ta)(x) = f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

$$T(\lambda a + b)(x) = f_{\underbrace{\lambda a + b}_{c}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + b_n) x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = \lambda f_a(x) + f_b(x)$$

$$= \lambda (Ta)(x) + (Tb)(x) \qquad \Rightarrow T \text{ lineer}$$

$$\|Ta\| = \|f_a\| = \|a\|_q \quad \Rightarrow \|T\| = 1$$

$\Rightarrow T$ izometri

İddia: T örtendir.

$T: \ell_q \longrightarrow \ell_p'$

$\forall g \in \ell_p'$ için $\exists a \in \ell_q \ \ni \ Ta = g$

$e_n = (0,0,\dots,1,0,\dots) \in \ell_p$ , $g \in \ell_p' \Rightarrow g : \ell_p \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer sınırlı

n. bileşen

$(e_n) \longmapsto g(e_n)$

$\Rightarrow g(e_n) = a_n \in \mathbb{R}$

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{|a_n|^q}{a_n}, & a_n \neq 0 \\ 0, & a_n = 0 \end{cases} \quad , \quad u_k = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k \in \ell_p$$

$g(u_k) = \beta_1 g(e_1) + \dots + \beta_k g(e_k) = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$ $\Rightarrow$ T izometri ve homeomorfizma

$\Rightarrow \ell_p' \cong \ell_q$

$g(u_k) = \sum_{n=1}^{k} |a_n|^q \Rightarrow \|g\| = \|a\|_q = \|f_a\|$

İddia: $g \in f_a$

$\Rightarrow g(x) = f_a(x) \quad \forall x \in \ell_p$

$x = (x_1, x_2, \dots) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots$

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n = f_a(x)$

Tanım: X Banach bir uzay olsun. Eğer $X'' = X$ ise X'e (reflexive) refleksif veya yansımalı uzay denir.

$1 < p < +\infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\ell_p' = \ell_q \Rightarrow \ell_p'' = \ell_q' = \ell_p$

$(\mathbb{R}^n)'' = (\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$

Örnek: $l_1' = l_\infty$

$$T : l_\infty \longrightarrow l_1'$$
$$a \longmapsto f_a$$

fix $a \in l_\infty$ ve $\forall x \in l_1$

$$f_a : l_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

$$|f_a(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \|a\|_\infty |x_n| = \|a\|_\infty \|x\|_1 < +\infty$$

$$\Rightarrow \|f_a\| \leq \|a\|_\infty$$

Tanım: X bir normlu uzay M, X'in sayılabilir alt kümesi olsun. Eğer $\overline{M} = X$ ise X'e ayrılabilir uzay denir.

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

İddia1: $l_1$ ayrılabilirdir.

İddia2: $l_\infty$ ayrılabilir değildir.

İddia3: $X'$ ayrılabilir $\Rightarrow$ X ayrılabilirdir.

? $l_\infty' \neq l_1$

$l_\infty' \supset l_1$

İddia1: $y = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots)$ $y_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, k$

sayılabilir $\mathbb{Q}^k = E_k = \{y \in l_1 : y_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, k, \ y_i = 0 \ i \geq k+1\}$ ve $E = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_k \subset l_1$ sayılabilir alt küme

$\overline{E} = l_1$

$x \in l_1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists e \in E$ vardır öyle ki $\|x - e\|_1 < \varepsilon$

$x \in l_1 \Rightarrow L = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = L \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} |S_n - L| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+ \ni \forall n > N$

$$|S_n - L| < \varepsilon/2$$
$$\|$$
$$\left| \sum_{k=1}^{n} |x_k| - L \right| < \varepsilon/2$$

$x = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots)$

$u = (x_1, \dots, x_N)$ için bir tane $e = (e_1, \dots, e_N) \in E_N$ öyle ki

$\|u - e\| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \|x - e\|_1 = \|(x_1 - e_1, \dots, x_N - e_N, x_{N+1}, \dots)\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n - e_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

19 Kasım 2019

İddia 2: $l_\infty$ ayrılabilir değildir.

$l_\infty$ ayrılabilir olsun. $\bar{E} = l_\infty$

Her $n$ için $x_n = 0$ veya $x_n = 1$ o.ş. $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ ⊛ , $t \in (0,1)$

Her $t \in (0,1)$ sayısı ⊛ yazılabilir.

$x = (x_n) \in l_\infty$ $\quad h : (0,1) \longrightarrow l_\infty$

$\quad t \longmapsto h(t) = (x_n) = x$

$\bar{E} = l_\infty$ , $x \in l_\infty$ ait

$\forall \varepsilon > 0$ , $\exists e_x \in E \ni \|e_x - x\| < \varepsilon = 1/4$

$\varepsilon = 1/4$, $e_x = g(x)$

$g(h(t)) = f(t)$ , $(0,1) \xrightarrow{h} l_\infty \xrightarrow{g} E$ , $f : (0,1) \longrightarrow E$ sayılamaz, sayılabilir.

$t \longmapsto x \longmapsto e_x$ $\qquad t \longmapsto e^x$

İddia: $f$ 1-1 'dir.

$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow e_{x_1} = e_{x_2} \Rightarrow \|e_{x_1} - e_{x_2}\| = 0$

$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|x_1 - e_{x_1} + e_{x_1} - e_{x_2} + e_{x_2} - x_2\|_\infty$

$\leq \|x_1 - e_{x_1}\|_\infty + \|e_{x_1} - e_{x_2}\|_\infty + \|e_{x_2} - x_2\|_\infty < 1/4 + 1/4 = 1/2$

$\Rightarrow \sup_n |x_n^1 - x_n^2| < 1/2 \Rightarrow x_n^1 = x_n^2 \ , \forall n \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow t_1 = t_2$ ↯

İddia 3: $X'$ ayrılabilir ise $X$ ayrılabilir.

( $Y$ ayrılabilir bir uzay ve $Z < Y$ alt uzayı ise $Z$'de ayrılabilirdir.)

$\overline{E} = Y \qquad \overline{E \cap Z} = Z$

$S_1 = \{ f \in X' : \|f\| = 1 \}$ ayrılabilir

$\overline{D = \{ f_n \in S_1 \}} = S_1$ her $n \in \mathbb{N}$ için bir tane $x_n \in X$ öyle ki $|f_n(x_n)| < 1/2$

$\overline{D = \{ x_n : x \in \mathbb{N} \}} = X$ , $l_p' = l_q \quad 1 < p < +\infty$

$l_1' = l_\infty$

$l_\infty' \neq l_1$

ayrılabilir değil / ayrılabilir

$\boxed{\begin{array}{l} X, X' \text{ ayırır} \\ \forall f \neq 0 , \ \exists x \neq 0 \\ \text{öyle ki } f(x) \neq 0 \end{array}}$

---

$V$ vektör uzayı

$W$ alt vektör uzayı $\quad V/W$ bölüm uzayı denir.

$(v+W) \in (V/W, +, \cdot) \qquad (v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$

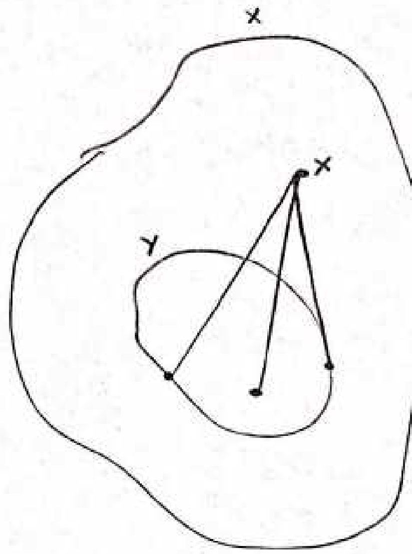
$a(v+W) = av + W$

- $X$ top. uzay, $\beta$ baz

$Y$ alt kümesi olsun. $X/Y$, $\beta_Y$'yi baz ($\beta_Y = \beta \cap Y$) kabul eden top. uzaydır.

$X$ normlu uzay. $Y$ kapalı alt uzayı olsun.

$(X/Y, +, \cdot)$ vektör uzayı, $x+Y \in X/Y$




$\|\bar{x}\| = \|[x]\| = \|x+Y\| = \inf\{\|x-y\| ; y \in Y\}$

1) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x \in Y$

2) $\|a\bar{x}\| = \inf\{\|ax - ay\| ; y \in Y\} = |a|\,\|\bar{x}\|$

3) $\|\bar{x}_1 + \bar{x}_2\| = \inf\{\|x_1 + x_2 - y\| ; y \in Y\}$

$= \inf\{\|x_1 - y_1 + x_2 - y_2\| : y_1, y_2 \in Y\}$

$\leq \|\bar{x}_1\| + \|\bar{x}_2\|$

$\|\bar{x}\| = \inf\{\|x-y\| ; y \in Y\} = \inf\{\|z\| : \forall y \in Y,\ \exists z \in \bar{x}$ ve $y = x - z\}$

$\bar{x} = \bar{z} \Rightarrow x + Y = z + Y$

$\forall z \in \bar{x} \Rightarrow x - z \in Y$

Teorem: $(X/Y, \|\cdot\|_b)$ Banachtır. (Ödev Sorusu: $(x_n)$ Cauchy ve $(x_{n_i})$ alt dizisi yakınsak ise $(x_n)$ yakınsak)

İspat: $\bar{x}_n = [x_n]$ bir Cauchy dizisi olsun.

İddia: Bir alt dizisi $\bar{x}_{n_i}$ yakınsaktır.

$\bar{x}_n$ Cauchy olduğundan bir alt dizisi $\bar{x}_{n_i}$ vardır öyle ki

$\|\bar{x}_{n_{i+1}} - \bar{x}_{n_i}\|_b < 1/2^i \Rightarrow \inf\{\|x_{n_{i+1}} - x_n - y\| ; y \in Y\} < 1/2^i$

$\Rightarrow \exists y_i \in Y$ öyle ki $\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i} - y_i\| < 1/2^{i-1}$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq m \geq N$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

$n_{i+1} > n_i$

inf — A

$1/2^i \quad 1/2^{i-1}$

$z_i = x_{n_{i+1}} - x_{n_i} - y_i \in X$

$z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \in X$

$\|z\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|z_i\| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < +\infty$

$$k: X \longrightarrow X/Y$$
$$x \longmapsto \bar{x}$$

$$k(\lambda x_1 + x_2) = \overline{\lambda x_1 + x_2} = \lambda x_1 + x_2 + Y = \lambda x_1 + \lambda Y + x_2 + Y = \lambda k x_1 + k x_2$$

$$\|kx\| = \|\bar{x}\|$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ öyle ki $\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|kx_1 - kx_2\| < \varepsilon$

$$\|kx_1 - kx_2\| = \inf\{\|x_1 - x_2 - y\| \,;\, y \in Y\}$$
$$\leq \|x_1 - x_2\| < \delta = \varepsilon$$

$\Rightarrow k$ düzgün sürekli

$$k(z) = \sum_{i=1}^{\infty} k(z_i) = \sum_{i=1}^{\infty} k(x_{n_{i+1}} - x_{n_i} - w_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_{n_{i+1}}} - \overline{x_{n_i}}}_{\in X/Y}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} \|\overline{x_{n_{i+1}}} - \overline{x_{n_i}}\| = 0 \Rightarrow \overline{x_{n_{i+1}}}$ alt dizisi yakınsaktır.

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \cancel{x_{n_2}} - x_{n_1} + \cancel{x_{n_3}} - \cancel{x_{n_2}} + \cancel{x_{n_4}} - \cancel{x_{n_3}} + \cdots + x_{n_{k+1}} - \cancel{x_{n_k}}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_1} = L \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_{n_{i+1}}} - \overline{x_{n_i}}$ $X/Y$ içinde yakınsaktır.

21 Kasım 2019

## Hahn-Banach Teoremi:

**Tanım:** $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$
$v \longmapsto q(v)$ olsun. Eğer a) $q(\lambda v) = \lambda q(v)$, $\forall \lambda \geq 0$
b) $q(v_1 + v_2) \leq q(v_1) + q(v_2)$ koşulları sağlanıyor ise $q$'ya alt lineer fonksiyonel adı verilir.

⊛ Her norm bir alt lineer fonksiyoneldir.

$p: V \longrightarrow \mathbb{R}$

i) $x=0 \Rightarrow p(x)=0$

ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$

iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ koşulları sağlanıyor ise p'ye yarı norm denir.

Her yarı norm bir alt lineer fonksiyoneldir.

Teorem: $V$ bir vektör uzay ve $W < V$'nin alt uzayı olsun.
$q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ bir alt lineer fonksiyonel ve $u: W \longrightarrow \mathbb{R}$
bir sınırlı lineer dönüşüm öü $u(w) \leq q(w)$ $\forall w \in W$ sağlansın.
Böylece $U: V \longrightarrow \mathbb{R}$ öyle ki $U\big|_W = u$ ve $U(v) \leq q(v)$, $\forall v \in V$ için.

İspat: i) $W < V$

ii) $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ alt lineer fonksiyonel

iii) $u \in W'$

iv) $u(w) \leq q(w)$ $\forall w \in W$

$\Rightarrow$ Bir tane genişlemesi $U \in V'$, $U\big|_W = u$, $U(v) \leq q(v)$, $\forall v \in V$

$x_0 \in V \setminus W$ olmak üzere $W_0 = \text{span}\{W, x_0\}$, $\forall x_0 \in W_0$ için

$\exists w \in W$ ve $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ öyle ki $w_0 = w + \lambda x_0$

$\exists u_0 \in W_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ öyle ki $u_0(w_0) = u_0(w + \lambda x_0) = u_0(w) + \lambda u_0(x_0)$
$= u(w) + \lambda u_0(x_0)$ vardır.

istenen $u_0(w_0) \leq q(w_0)$ koşulu sağlansın.

$u_0(w + \lambda x_0) \leq q(w_0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda=1 \Rightarrow u(w) + u_0(x_0) \leq q(w+x_0) \\ \lambda=-1 \Rightarrow u(w) - u_0(x_0) \leq q(w-x_0) \end{array}\right\} u(w) - q(w-x_0) \leq u_0(x_0) \leq q(w+x_0) - u(w), \ \forall w \in W$$

$$\circledast \ \sup_{w \in W}\{u(w) - q(w-x_0) : w \in W\} \leq u_0(x_0) \leq \inf\{q(w+x_0) - u(w) : w \in W\}$$

O halde $u_0(x_0)$ seçimi $\circledast$ koşulunu sağlayacak şekilde seçildiğinde $u_0$ vardır ve $u_0(w_0) \leq q(w_0)$ olur.

Eğer $W_0 = V \Rightarrow$ ispat biter

Eğer $W_0 \neq V \Rightarrow \exists x_1 \in V \setminus W$ , $W_1 = \text{span}\{W_0, x_1\}$

$\exists u_1 : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u_1\Big|_{W_0} = u_0 \ , \quad u_1(w_1) \leq q(w_1) \ , \ \forall w_1 \in W_1$$

$(W_i, u_i)$

$W_i < V$ alt uzay , $u_i \in W_i$

$((W_i, u_i), \leq)$ kısmi sıralama

$$(W_i, u_i) \leq (W_{i+1}, u_{i+1}) \iff W_i < W_{i+1} \ \wedge \ u_{i+1}\Big|_{W_i} = u_i$$

Bu posetten alınan bir zincir üstten $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ ile sınırlıdır.

Zorn Lemmadan posetin maximal elemanı vardır.

İddia: Maksimal eleman $V$dir.

$\text{Max}(\text{Poset}) = G$ olsun ve $G \neq V$

O halde $G < V$ , $\exists v \in V \setminus G \Rightarrow G' = \text{span}\{G, v\} < V$ , (ama $G$ max) $\lightning$

Teorem: $V$ vektör uzayı, $W < V$ alt uzay olmak üzere $p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ yarı normlu olsun. $u : W \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonel ve $|u(w)| \leq p(w)$ , $\forall w \in W$ için $\exists U : V \longrightarrow \mathbb{R}$ öyle ki $|U(v)| \leq p(u)$ $\forall v \in V$

$p$ yarı-norm $\Rightarrow p$ alt lineer fonksiyonel $\Rightarrow$ HBT'den $U(v) \leq p(v)$, $\forall v \in V$

$$-U(v) = U(-v) \leq p(-v) = |-1|\, p(v) = p(v)$$

$$\Rightarrow -p(v) \leq U(v) \leq p(v) \Rightarrow |U(v)| \leq p(v)$$

Teorem: $V$ normlu uzay ve $W < V$'nin normlu alt uzayı olmak üzere $u \in W'$ olsun. Böylece bir tane $U \in V'$ öyle ki $\|u\| = \|U\|$

İspat: $p: V \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto p(v) = \|u\| \|v\|$ yarı norm

- $v = 0 \Rightarrow p(v) = 0$
- $p(av) = \|u\| \|av\| = |a| \|u\| \|v\| = |a| p(v)$
- $p(v_1 + v_2) = \|u\| \|v_1 + v_2\| \leq p(v_1) + p(v_2)$

$u \in W'$, $u: W \longrightarrow \mathbb{R}$

$|u(w)| \leq \|u\| \|w\| = p(w) \quad \Rightarrow \exists U: V \longrightarrow \mathbb{R}$ öyle ki

$|U(v)| \leq \|u\| \|v\| = p(v) \quad \Rightarrow \|U\| < \|u\|$

ve $\|u\| \leq \|U\|$ aşikardır.

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in V}} \{ |U(v)| \} \geq \sup_{\substack{\|w\|=1 \\ w \in W}} \{ |u(w)| \} = \|u\|$$

Lemma: $V$ normlu uzay ve $x_0 \neq 0 \in V$ olsun. $U(x_0) = \|x_0\|$ ve $\|U\| = 1$ o.ş bir $U \in V'$ vardır.

---

(*) $V$ normlu uzay olsun. $V'$ dual uzayı $V$'yi ayırır. $\forall f \in V'$, $\exists x \in V \ni f(x) \neq 0$

---

İspat: $w = a x_0$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad W = \text{span}\{x_0\}$ , $W < V$ alt uzayıdır.

$u: W \longrightarrow \mathbb{R}$

$a x_0 \longmapsto u(a x_0) = a \|x_0\|$

$$u(\alpha w_1 + w_2) = u(\alpha a_1 x_0 + a_2 x_0) = (\alpha a_1 + a_2) \|x_0\|$$
$$= \alpha u(w_1) + u(w_2) \quad \Rightarrow u \text{ lineer}$$

$|u(w)| = |u(a x_0)| = |a \|x_0\|| = |a| \|x_0\| = \|a x_0\| = \|w\| \quad \Rightarrow \|u\| = 1$

O halde $U: V \longrightarrow \mathbb{R}$ öyle ki $\|U\| = \|u\| = 1$

$U(x_0) = u(x_0) = \|x_0\|$

## Dual Operatörler

$(V' = L(V,\mathbb{R}), \|.\|)$ Banach uzayı

$\ell_p' = \ell_q \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \qquad 1<p<+\infty \quad , \quad \ell_1' = \ell_\infty \, , \quad \ell_\infty' \supset \ell_1$

$T: X \longrightarrow Y$ operatörü , X ve Y normlu uzay aü $\quad T': Y' \longrightarrow X'$

$$y' \longmapsto T'y' = x'$$

$$T'y' : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (T'y')(x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "T'"] & X' \\ Y & X \arrow[l, "T"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y' \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$(T'y')(x) = x'(x) = y'(Tx)$ şeklinde tanımlanan $T'$ dönüşümüne dual operatör denir.

$$T'(\lambda y_1' + y_2')(x) = (\lambda y_1' + y_2')(Tx)$$
$$= \lambda y_1'(Tx) + y_2'(Tx)$$
$$= \lambda (T'y_1')(x) + (T'y_2')(x) \ , \ \forall x \in X$$

$$\|T'\| = \sup_{\|y'\|=1} \|T'y'\| \leq \|T\|$$

$$\underset{\substack{\in X' \\ \text{operatör}}}{\|T'y'\|} = \sup_{\|x\|=1} \|(T'y')(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|y'(Tx)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|y'\| \|Tx\| = \|y'\| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|y'\| \|T\|$$

Ör: $T: (\mathbb{R}^3, \|.\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y+z, x+z)$$

$\vec{x_1}, \vec{x_2}$ $\qquad$ T lineer

$$\|T\vec{x}\|_2 = \sqrt{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2} = \sqrt{2(x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+xz)}$$
$$\leq \sqrt{2x^2+2z^2+2y^2 + x^2+y^2 + y^2+z^2 + z^2+x^2}$$
$$= 2\|\vec{x}\|_2$$

$(x-y)^2 \geq 0$

$x^2+y^2 \geq 2xy$

$Te_1 = (1,0,1) = e_1 + e_3$

$Te_2 = (1,1,0) = e_1 + e_2$

$Te_3 = (0,1,1) = e_2 + e_3$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$[A]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow [A] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} T' : \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3)' &\longrightarrow (\mathbb{R}^3)' = \mathbb{R}^3 \\ f &\longmapsto T'f = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T'f) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto (T'f)\vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 x + g_2 y + g_3 z = ((T'f)\vec{x}) &= f(Tx) \\ &= (f_1, f_2, f_3)\,(x+y,\ y+z,\ x+z) \\ &= f_1 \cdot (x+y) + f_2 \cdot (y+z) + f_3 (x+z) \\ &= (f_1+f_3)x + (f_1+f_2)y + (f_2+f_3)z \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= f_1 + f_3 \\ g_2 &= f_1 + f_2 \\ g_3 &= f_2 + f_3 \end{aligned}\right\} \quad T'f = (f_1+f_3,\ f_1+f_2,\ f_2+f_3) \qquad [T'] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = A^T$$

ÖR: Fix $c \in \ell_\infty$ ve $c_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} T: \ell_p &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longmapsto Tx = (c_n x_n) \end{aligned}$ , $T(ax+y) = aTx + Ty$

$T$ lineer

$$\|Tx\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|c\|_\infty^p |x_n|^p\right)^{1/p} = \|c\|_\infty \|x\|_p$$

$$\|Tx\|_p \leq \|c\|_\infty \|x\|_p \Rightarrow \|T\| \leq \|c\|_\infty$$

$$\begin{aligned} T' : \ell_p' = \ell_q &\longrightarrow \ell_q = \ell_p' \\ f = (f_n) &\longmapsto T'f = y = (g_n) \end{aligned}$$

$$\underset{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n x_n}{\overset{\|}{(T'f)(x)}} = \underset{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n c_n x_n}{\overset{\|}{f(Tx)}} \qquad \Rightarrow g_n = c_n f_n ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow g = (g_n) = (T'f) = (c_n f_n) = cf$$

Herhangi $x \in X$ elemanının normu;

$\|x\| = \sup\{ |u(x)| : \|u\| \leq 1\}$

$0 \neq T_x \in Y$ elemanı, $y' \in Y'$

$\| Tx\| = \sup\{ |y'(Tx)| : \|y'\| \leq 1\}$

$|y'(Tx)| = |T'(y')(x)| \leq \|T'y'\| \|x\| \leq \|T'\| \|y'\| \|x\|$

$\|Tx\| = \sup\{ |y'(Tx)| : \|y'\| \leq 1\} \leq \sup\{ \|T'\| \|y'\| \|x\| : \|y'\| \leq 1\}$

$$\|Tx\| \leq \|T'\| \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T'\|$$

Örnek: $T : \ell_p \longrightarrow \ell_p$, $c \in \ell_\infty$, $c_n \neq 0$, $\forall n$ $\exists m$ için $m \leq |c_n| \leq \|c\|_\infty$

$x \longmapsto cx = (c_n x_n)$

$\|T\| = \|c\|_\infty$ (?)

$\|T\| \leq \|c\|_\infty < +\infty \Rightarrow T$ sınırlı

$\exists x \in \ell_p$ öyle ki $\|Tx\|_p = \|c\|_\infty$, $\|x\| \leq 1$

$x = \left( \frac{\|c\|_\infty}{|c_n|} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{2^n}} \right)_{n=1}^{\infty}$ elemanını alalım. $x \in \ell_p$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|c\|_\infty^p}{|c_n|^p} \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2^n}}\right)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|c\|_\infty}{m}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2^n}}\right)^p \right)^{1/p} = \frac{\|c\|_\infty}{m} \left( \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) - 1 \right)^{1/p}$$

$$= \frac{\|c\|_\infty}{m} \leq 1 \Rightarrow \|c\|_\infty \leq m$$

$$Tx = \left( c_n \cdot \frac{\|c\|_\infty}{|c_n|} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2}}\right)^{np} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$\|Tx\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^p \|c\|_\infty^p}{|c_n|^p} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2^n}}\right)^p \right)^{1/p} = \|c\|_\infty \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \right)^{1/p} = \|c\|_\infty$$

c eğer sabit dizi değil ise $\|T\| \leq \|c\|_\infty$ dur

Ancak c sbt dizi ise $\|T\| = \|c\|_\infty$

Topoloji için sorular

Baire Kategori Teoremi Sonuçları:

- Banach Steinhaus Teoremi
- Düzgün Sınırlılık Prensibi (Daha güçlü)
- Kapalı Grafik Teoremi
- Açık Tasvir Teoremi

## Banach - Steinhaus Teoremi

$X$ Banach uzayı, $Y$ normlu uzay o.ü $I$'da herhangi bir küme olsun. $i \in I$ o.ü $T_i \in L(X,Y)$ ve $\forall x \in X$ için $\{T_i x\}$ kümesi $Y$ uzayın sınırlı ise $\{T_i\}$ kümesi $L(X,Y)$ uzayında sınırlıdır. → orbit

- $I = \mathbb{N}$ bir indis kümesi
  $I = \mathbb{R}$ " "

  $\emptyset \neq I$ bir küme o.ü $(I, \leq)$ kısmi sıralama bağıntısı tanımlı olsun. Her $i_1, i_2 \in I$ için $i_3 \in I$ var ve $i_1 \leq i_3$, $i_2 \leq i_3$ koşulu sağlanıyor ise $I$'ya indis kümesi adı verilir.

  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizi, $(x_i)_{i \in I}$ net

$(I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$ $\quad i_1 \leq i_2 \Rightarrow i_1^1 \leq i_1^2 \wedge i_2^1 \leq i_2^2$ kısmi sıralama bağıntısıdır.

$i_1$ ve $i_2$ için $\exists i_3 \ni i_3 = (i_1^1 \wedge i_1^2, i_2^1 \wedge i_2^2)$

İspat: İddia: $\sup \|T_i\| < +\infty$

Herhangi $x \in X$ alalım. $\sup\{\|T_i x\| : i \in I\} = r(x) \in \mathbb{R}$ → fonk. değil $x$'e bağlı

$A_n = \{x \in X : \|T_i x\| \leq n \quad \forall i \in I\}$

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi tanımlansın.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k$ kapalıdır!

$(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset A_k$ dizisi alalım öyle ki $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

Her $i\in I$ için $T_i$ sürekli $\Rightarrow T_i(x_m) \longrightarrow T_i(x)$

$\|T_i x\| \leq \|T_i x - T_i x_m\| + \|T_i x_m\| < \varepsilon + k$

$\Rightarrow \|T_i x\| \leq k \Rightarrow x \in A_k$ Böylece $A_k$ kapalıdır.

$A = X$ 'tir! $(A \subseteq X)$

$x\in X$ alalım. $\{T_i x\}$ sınırlı old. $\sup\{\|T_i x\| : i\in I\} = r(x) \leq \underbrace{[\![r(x)]\!]+1}_{m\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow x\in A_m \Rightarrow X \subseteq \bigcup A_m = A$

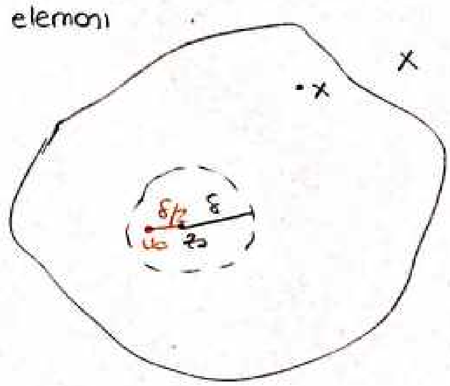
$\therefore X = A$ olur.

$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ sayılabilir kapalı kümelerin birleşimi ve $X$ Banach uzayı

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\mathring{A}_{n_0} \neq \emptyset$

$z_0 \in A_{n_0}$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $B(z_0,\delta) \subset A_{n_0} \subset X$

Herhangi $x\in X$ alalım. $u = \frac{\delta}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|} + z_0$ elemanı




$\|u - z_0\| = \left\| \frac{\delta}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$\Rightarrow u \in B(z_0,\delta) \subset A_{n_0}$

Her $i\in I$ için $\|T_i u\| \leq n_0$

$$\left\| T_i\left(\frac{\delta}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|} + z_0\right) \right\| = \frac{\delta}{2\|x\|}\|T_i x\| + \|T_i z_0\|$$

$\|T_i u\| = \frac{\delta}{2\|x\|}\|T_i x\| + \|T_i z_0\| \leq n_0 \Rightarrow \|T_i x\| \leq \underbrace{\frac{2}{\delta}(n_0 - \|T_i z_0\|)}_{M}\|x\|$

$\Rightarrow \|T_i\| \leq M$ üstten sınırlı $\Rightarrow \sup\limits_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$

Düzgün Sınırlılık Prensibi: $X$ ve $Y$ Banach uzayı, $T_n \in L(X,Y)$ operatör dizisi olsun. $A$ $X$ içinde yoğun bir küme o.ü. $\forall a \in A$ için $\{T_n a\}$ yakınsak olsun. O halde $T_n \longrightarrow T$ (operatör normunda) bir $T \in L(X,Y)$ vardır.

$X$ uzayında her $x \in X$ için $T_n x$ $Y$'de sınırlıysa ve

İspat: $\mathbb{N} = I$, $\{T_n x\}$ $\forall x \in X$ için sınırlı $\Rightarrow$ BST'den $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$

İddia: Her $x \in X$ için $\{T_n x\}$ yakınsak

Elimde $\bar{A} = X$ ve $\forall a \in A$ için $\{T_n a\}$ yakınsak

$\bar{A} = X$ olduğundan her $x \in X$ için $\exists a \in A$ öyle ki $\|x - a\| < \varepsilon/3M$

$Y \supset \{T_n a\}$ Cauchy

? Her $x \in X$ için $\{T_n x\} \subset Y$ Cauchydir. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > m > N$ iken $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon$

$$\|T_n x - T_m x\| = \|T_n x - T_n a + T_n a - T_m a + T_m a - T_m x\|$$
$$\leq \|T_n x - T_n a\| + \|T_n a - T_m a\| + \|T_m a - T_m x\|$$
$$\leq M\|x-a\| + \varepsilon/3 + M\|x-a\|$$
$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$

$\{T_n x\}$ yakınsak $\forall x \in X$ için $T_n x \longrightarrow z = Tx$

$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ dönüşümü tanımlansın.

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T x_1 + T x_2 \quad (\text{lineer})$$

Herhangi $x \in X$ için
$$\|Tx\| = \|T_n x - T_n x + Tx\|$$
$$\leq \|T_n x - Tx\| + \|T_n x\|$$
$$< \varepsilon + M\|x\| \Rightarrow \|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$$

$\therefore T \in L(X,Y)$

yo da $\quad Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$

$= \limsup_{n\to\infty} T_n x$

$$\|Tx\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \{\|T_n x\|\} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \{M\|x\|\} = M\|x\|$$

$\Rightarrow T \in L(X,Y)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff L = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{m\geq 1} \sup_{n\geq m} a_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{m\geq 1} \inf_{n\geq m} a_n$$

$A = \{ a_n$ dizisinin tüm alt dizilerinin limitleri kümesi $\}$

$\sup A = \inf A$

$\Updownarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ vardır.

$T : X \longrightarrow Y$ operatör

$G(T) = \{(x,y) : y = Tx\} \subseteq X \times Y$ $\quad$ T'nin grafiği adı verilir. $\longrightarrow$ T lineer old. $G(T)$ alt uzay

$G(T)$ kapalıdır $\iff \overline{G(T)} = G(T) \overset{*}{\iff} \forall a \in G(T)$ için $\exists (a_n) \subset G(T)$ öyle ki $a_n \longrightarrow a$

NOT

$(X\times Y, \|.\|_g)$ normlu uzay

$(x, Tx) = a \in G(T)$

$\|a\|_g = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ graf normu

$a_n = (x_n, T_n x) \quad a = (x, Tx)$

Ayrıca X ve Y tam ise $(X\times Y, \|.\|_g)$ Banach uzayıdır.

$*$ devamı $\iff \|a_n - a\|_g \longrightarrow 0$

$\|$

$\|x_n - x\| + \|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0 \iff \left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ Tx_n \longrightarrow y \end{array}\right\} y = Tx$ olmasıdır.

Lemma: T sınırlı $\Longrightarrow$ G(T) kapalıdır.

İspat: T sınırlı $\Leftrightarrow$ T sürekli $\Leftrightarrow$ T dizisel sürekli

$x_n \longrightarrow x$ için $Tx_n \longrightarrow Tx$

$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ Tx_n \longrightarrow Tx \end{array}\right\} y = Tx$ old. $G(T)$ kapalıdır.

Kapalı Grafik Teoremi: X ve Y Banach, $T: X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer G(T) kapalı ise T sınırlıdır.

İspat: $(X \times Y, \|.\|_g)$ Banach uzayıdır çünkü X ve Y Banachtır.

$(x_n, Tx_n) = (g_n) \subset (G(T), \|.\|_g)$ dizisi Cauchy olsun.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > m > N$ iken $\|g_n - g_m\|_g < \varepsilon$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| + \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon \Longrightarrow (x_n) \subset X$ ve $(Tx_n) \subset Y$ Cauchy

X ve Y Banach olduğundan $x_n \longrightarrow x$ ve $Tx_n \longrightarrow y$

$\Rightarrow \underset{\in G(T)}{(x_n, Tx_n)} \longrightarrow \underset{\in \overline{G(T)}}{(x,y)}$

$G(T)$ kapalı old. $(x,y) \in G(T)$, $y = Tx$

Birim operatörü

$$I: (X, \|.\|_x) \longrightarrow (X, \|.\|_g)$$
$$x \longmapsto Ix = x$$

$$\|x\|_x \leq \|x\|_g = \|x\|_x + \|Tx\|_x$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ öyle ki $\|x - x_0\|_x < \delta \Rightarrow \|I(x) - I(x_0)\| = \|x - x_0\|_g < \varepsilon$

$\Longrightarrow I$ sürekli $\Longrightarrow I$ sınırlı

$m\|x\|_X \underset{?}{\leq} \| Ix\|_g = \|x\|_g \leq M.\|x\|_X$

$B(x_0,\delta)$ açık kümesi $(X, \|.\|_X)$

$\|$

$\{x \in X, \|x-x_0\|_X < \delta\}$

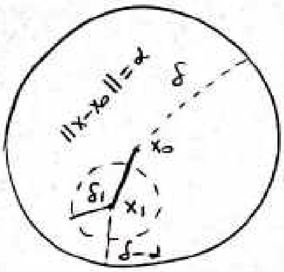
İddia: $I(B(x_0,\delta))$ açıktır.

$\equiv x_1 \in B(x_0,\delta)$ iç noktadır.

$\exists \delta_1 > 0$ öyle ki $B(x_1,\delta_1) \subset B(x_0,\delta)$

$\|$

$\{x \in X : \|x-x_1\|_g < \delta_1\}$




$\delta_1 = M2\delta$

$\in X$

$\|x-x_1\|_g \leq M\|x-x_1\|_X$

$\leq M.2\delta = \delta_1$

$\Rightarrow I$ açık $\Rightarrow I^{-1}$ sürekli

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}_+$ öyle ki $m\|x\|_X \leq \|x\|_g$

$\Rightarrow \|Tx\|_y \leq \|x\|_g \leq M.\|x\|_X$

$\Rightarrow T$ sınırlı

$T: X \longrightarrow Y$

$T$ sınırlı $\Rightarrow \overline{G(T)} = G(T)$

$\Leftarrow$
X ve Y Banach uzayı

İzdüşüm: $P^2 = P$, $P: X \longrightarrow X$ operatör

Lemma: X Banach uzayı, P bir izdüşüm olsun. Eğer $ker(P)$ ve $Ran(P)$ kapalı ise P sınırlıdır.

İspat: $P: X \longrightarrow X$ operatör, X Banach uzayı

KGT: P sınırlıdır $\Leftrightarrow \overline{G(P)} = G(P)$

İddia: $G(P)$ kapalıdır. $\underset{u}{\underset{\|}{(x,y)}} \in \overline{G(P)}$

$\exists \underset{(x_n, Px_n)}{\underset{\|}{(u_n)}} \subset G(P)$ öyle ki $u_n \xrightarrow[\|\cdot\|_g]{} u$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için $\|x_n - x\| + \|Px_n - y\| = \|u_n - u\|_g < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim x_n = x$
$\lim Px_n = y \in \overline{Ran(P)} = Ran(P)$ (Çünkü $Ran(P)$ kapalı yakınsadığı yer elemanı)

İddia: $y = Px$

$z_n = x_n - Px_n$ tanımlansın. $Pz_n = P(x_n - Px_n) = Px_n - P^2x_n = 0 \Rightarrow (z_n) \in ker(P)$

$z_n = x_n - Px_n \longrightarrow x - y$ ve $z_n \in ker P = \overline{ker P} \Rightarrow x - y \in ker P$

$\Rightarrow P(x-y) = 0 \in Ran(P)$

$\Rightarrow Px = Py \underset{\circledast}{=} y$

$\circledast$ $Py \in Ran P$
$y \in \overline{Ran(P)} = Ran(P)$
$P^2 a = P(\underbrace{P(a)}_{y}) = Pa = y$

matris normu önemli

Açık Tasvir Teoremi: X ve Y Banach uzayı $T \in L(X,Y)$ olsun.
Dönüşüm
T örten ise T açıktır.

Sonuç: X ve Y Banach uzayı, T sınırlı, T 1-1 ve örten ise
T açık $\Rightarrow$ $T^{-1}$ sürekli $\Rightarrow$ $T^{-1}$ sınırlı $\Rightarrow$ T tersinir.

$T^{-1}$ var ise T'ye terslenebilir (inverse exists)

$T^{-1}$ var ve sınırlı ise tersinir (invertible) denir.

Örnek: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y,\ x-y+z,\ x-z)$

operatör

$$\|Tx\|_2 = \sqrt{(x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2} = \sqrt{2x^2+3y^2+2z^2+2xz} \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$$

$(x-z)^2 \geq 0$

$x^2+z^2 \geq 2zx$

$$= \sqrt{3}\, \|x\|_2$$

$\|T\|_2 \le \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ sınırlı

$$T = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\|T\|_2 = \|A\|_2 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$

$\det(\lambda I - P) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)^2 - (\lambda+1) - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1{,}5468 \qquad \lambda_{2,3} = -1{,}2 \mp 0{,}5i$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad A = V^{-1} D V$$

$\|T\|_2 = \|\lambda_2\|$ modül

maximum olan

T sınırlı, $\mathbb{R}^2$ Banach, rank $A = 3$ old. örten $\Rightarrow$ T tersinir.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}(x,y,z) = \left( \frac{x+y+z}{3},\ \frac{2x-y-z}{3},\ \frac{x+y-2z}{3} \right)$$

# Zayıf ve Güçlü yakınsaklık

$X$ normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $(x_n)$ dizisi $x \in X$ elemanına normda yakınsıyor ise $(\|x_n - x\| \longrightarrow 0)$ $x_n$, $x$'e güçlü yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{\|.\|} x$, $x_n \longrightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Her $f \in X'$ olmak üzere eğer $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$'e yakınsıyor ise $x_n$, $x$'e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n \longrightarrow x$ şeklinde gösterilir.

$$f \in X' \Rightarrow f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{lineer, sınırlı dönüşüm}$$
$$x_n \longmapsto f(x_n)$$

$$(f(x_n)) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} | f(x_n) - f(x) | = 0$$

$$\circledast \left[ \begin{array}{l} \lim a_n = L \Rightarrow \lim |a_n| = |L| \\ \lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0 \end{array} \right]$$

Lemma: $x_n \longrightarrow x \Rightarrow x_n \longrightarrow x$

$$\left( x_n \xrightarrow{\|.\|} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x \right)$$

İspat: Verilen herhangi $f \in X'$ için için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ ispatlanmalı.

Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\exists N$ öyle ki $\forall n > N$ için

$$| f(x_n) - f(x) | = | f(x_n - x) | \leq \|f\| \, \| x_n - x\| < \|f\| \frac{\varepsilon}{\|f\|} = \varepsilon$$

Lemma: Zayıf limit ($x$'e zayıf limit denir) var ise tektir.

İspat: $x_n \xrightarrow{w} x$ , $x_n \xrightarrow{w} y$ olsun.

Herhangi $f \in X'$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ , $f(x_n) \longrightarrow f(y)$ dur.

$\varepsilon > 0$ alınsın. $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_n) + f(x_n) - f(y)|$

$\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\forall n \geq N$ için

$\Rightarrow f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

(Hahn Banach Teo
Her $x \neq 0 \in X$ için
$\exists f \neq 0 \in X'$ öyle ki $f(x) \neq 0$)

(Eğer $x - y \neq 0$ olsaydı en az bir $f$ için $f(x-y) = 0$ olmalıydı.)

Örnek: $1 \leq p < +\infty$ , $\ell_p$ Banach uzayı , $\ell_p' = \ell_q$

$x_n \xrightarrow{\|.\|} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$
$\not\Leftarrow$
örneği

$x \in \ell_p$, $f \in \ell_p'$ , $f : \ell_p \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad \| $
$y \in \ell_q$ $\quad (x_n) \longmapsto f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

$(e_n)$ dizisini alalım. $e_1 = (1, 0, 0, ...)$

$e_2 = (0, 1, 0, ...)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, ..., 1, ...)$

İddia: $e_n \overset{\|.\|}{\not\longrightarrow} e = (0,0,0, ..., 0, ...)$

($\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ öyle ki $\forall n \geq N$ iken $\|e_n - e\|_p < \varepsilon$)

$\|e_n - e\|_p = \|e_n\|_p = 1$ $\forall n$ için $\Rightarrow e_n \overset{\|.\|}{\not\longrightarrow} e$

İddia: $e_n \xrightarrow{w} e$ , herhangi $f \in \ell_p'$ için $f(e_n) \longrightarrow f(e) = 0$

$f(e_n) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^n \cdot y_i = y_n$

$y \in \ell_q = \ell_p' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < +\infty \Rightarrow \underset{n \to \infty}{\lim} |y_n|^p = 0 \Rightarrow \lim |y_n| = 0$
genel terim

$\Rightarrow \lim y_n = 0$

Tekrar

10 Aralık 2019

$(e_n) \subset \ell_p$ , $(e_n) \xrightarrow{\|.\|}\!\!\!\!\!\!\!/\;\; 0$

$e_n \longrightarrow 0 \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists N,\ \|e_n - 0\| < \varepsilon \quad \forall n>N$

$$\|e_n\| = \Big(\sum_{\substack{k=1\\ n\neq k}}^{\infty} 0^p + 1^p\Big)^{1/p} = 1 \not< \varepsilon$$

$(e_n) \subset \ell_p$ dizisi 0'a güçlü yakınsamaz.

İddia: $e_n \xrightarrow{w} 0 \iff \forall f \in \ell_p' = \ell_q \quad f(e_n) = f(e_n - 0) \longrightarrow 0$

$\exists y \in \ell_q$ var öyle ki $f = y$

$f(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k^n = y_n \longrightarrow 0$

$\Big[\ y \in \ell_q$ old. $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |y_n|^p = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0 \Longrightarrow \lim y_n = 0\ \Big]$

Tanım: $(X, \|.\|)$ normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ alt dizisi olsun. Her $f \in X'$ için $(f(x_n)) \subset \mathbb{R}$ bir Cauchy ise $(x_n)$ dizisine zayıf Cauchy adı verilir.

Lemma: $(x_n) \subset X$ dizisi zayıf yakınsak ise zayıf Cauchy'dir.

İspat: Verilen $\varepsilon>0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m>n>N$ için

$|f(x_m) - f(x_n)| \leq |f(x_m) - f(x)| + |f(x) - f(x_n)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Big\{ x_n \xrightarrow{w} x \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists N' \ni \forall n>N'$ için $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2 \Big\}$

$\Rightarrow (x_n)$ zayıf Cauchy'dir.

İddia: Zayıf Cauchy $\not\Rightarrow$ Zayıf yakınsak

$X = c_0$, $Y = c_{00}$ , $(y_n) \subset X$ $\quad y_n = (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$

$c_0 = \{x \in \ell_\infty : \lim x_n = 0\}$ $\quad c_{00} = \{x \in \ell_\infty : x_n = 0$ sonlu tane $n$ hariç$\} \subset c_0$

İddia: $(y_n) \subset c_{00}$ dizisi zayıf Cauchy'dir.

Herhangi $f \in c_{00}'$ alınsın.

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists N$ öyle ki $\forall m > n > N$ için $|f(y_n) - f(y_m)| = |f(y_n - y_m)|$

$$\leq \|f\| \, \underbrace{\|(y_n - y_m)\|}_{\text{Cauchy}}$$

İddia: $(y_n) \subset c_{00}$ Cauchydir.

$$< \|f\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|f\|} = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ öyle ki $\forall m > n > N$ için $\|y_m - y_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \varepsilon$

$y_n = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, \ldots)$ $\quad y_m = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 1/{n+1}, \ldots, 1/m, 0, \ldots)$

İddia: $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y = (1/n) = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1$ öyle $\forall n > N$ iken

$\|y_n - y\|_\infty = \|(1, 1/2, \ldots, 1/n, 0, \ldots) - (1, 1/2, \ldots, 1/n, 1/{n+1}, \ldots)\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, 1/{n+1}, \ldots)\|_\infty = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} = \varepsilon$

$y = (1/n) \notin c_{00}$ ama $y = (1/n) \in c_0$

$c_0 > Y = c_{00}$ kapalı bir alt uzay değil!

$y \in \bar{Y} \setminus Y$, $\exists (y_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y$

Ayrıca $(y_n) \subset c_0$ ve $y \in c_0$ olduğundan $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y$ $c_0$'da

$y_n \longrightarrow y$ $c_0$'da güçlü yakınsak $\Rightarrow$ zayıf yakınsaktır.

Her $f \in c_0'$ için ⊛ $f(y_n) \longrightarrow f(y)$

Kabul edelim ki, $y_n \longrightarrow x$ $c_{00}$'da zayıf yakınsasın.

$\forall g \in c_{00}'$ için $g(y_n) \longrightarrow g(x)$

⊛ dan $f|_{c_{00}}(y_n) = g(y_n) \longrightarrow f|_{c_{00}}(y) = g(y)$

Zayıf limit var ise tektir. Böylece $x = y \in c_{00} = Y$ ↯

Lemma: $(x_n) \subset X$ zayıf yakınsak ise $(\|x_n\|)$ sınırlıdır.

örnek: $X = \ell_p$, $(e_n) \xrightarrow{w} 0$ ve $\|e_n\| = 1$ $\Rightarrow \sup \|e_n\| \leq 1$

$X'' = L(X', \mathbb{R})$, $U: X \longrightarrow X''$

$$x \longmapsto U(x) : X' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$U(x) = x'' \qquad f \longmapsto U(x)(f) = f(x)$$

$U(x)(f) = x'' f = f(x)$, U lineerdir!

$U(ax+y)(f) = f(ax+y) = a f(x) + f(y) = a\, U(x) f + U(y)(f)$

$\ker U = \{0\}$ ise U 1-1 'dir. $x \in \ker U$ öyle ki $U(x) = 0$

$x''(f) = U(x)(f) = 0$, $U(x)(f) = f(x)$ $\forall f \in X'$ $\Rightarrow$ $x = 0$ HBT'den

$\Rightarrow$ $\ker U = \{0\}$ $\Rightarrow$ U 1-1 dir.

$\|x''\| = \|Ux\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |U(x)(f)| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)| \underset{*}{=} \|x\|$ (*) $\|x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(x)|$ HBT'den

$\Rightarrow$ $\|Ux\| = \|x\| = \|x''\|$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ U izometri, $\|U\| = 1$

$\Rightarrow$ U sınırlı, sürekli

$(x_n)$ dizisi zayıf yakınsaktır $\Rightarrow$ $\forall f \in X'$ için $(f(x_n)) \subset \mathbb{R}$ yakınsaktır.

$\Rightarrow$ $(f(x_n)) \subset \mathbb{R}$ sınırlıdır. (Yakınsak dizi sınırlıdır.)

$\Rightarrow$ $\exists C_f$ öyle ki $|f(x_n)| \leq C_f$

$$|f(x_n)| = |x_n''(f)| \leq C_f$$

DSP'den

$\Rightarrow$ $\sup\limits_n \|x_n\| = \sup\limits_n \|x_n''\| < M$ o.ş bir $M > 0$ vardır.

Lemma: $\dim(X) = k < +\infty$ olsun. $x_n \xrightarrow{\|.\|} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

İspot: ($\Rightarrow$) $x_n \xrightarrow{\|.\|} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

($\Leftarrow$) $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. $\dim X = k < +\infty$ olduğundan $\{e_1, \dots, e_k\}$ bazı vardır.

öyle ki $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = X$

Her $x \in X$ için $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ vardır öyle ki $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$

$x_n = \alpha_1^n e_1 + \dots + \alpha_k^n e_k$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$

$\Rightarrow \forall f \in X'$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

$$f(x_n) = f(\alpha_1^n e_1 + \dots + \alpha_k^n e_k)$$
$$= \alpha_1^n f(e_1) + \dots + \alpha_k^n f(e_k)$$

$$f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k)$$
$$= \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_k f(e_k)$$

$\Rightarrow (\alpha_i^n) \longrightarrow \alpha_i \quad , \forall i = 1, 2, \dots, k$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için $|\alpha_i^n - \alpha_i| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sup_{i=1,\dots,k} |\alpha_i^n - \alpha_i| < \varepsilon$

$\circledast$ $\|x_n - x\|_\infty = \|(\alpha_1^n e_1 + \dots + \alpha_k^n e_k) - (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k)\| = \|\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i^n - \alpha_i) e_i\|_\infty$

$$= \sup_{i=1,\dots,n} |\alpha_i^n - \alpha_i| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \|x_n - x\|_\infty \longrightarrow 0$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{\|.\|} x$

Lemma: $x_n \xrightarrow{w} x \iff$ (i) $\{\|x_n\|\}$ sınırlıdır.

(ii) $M \subset X'$ alt kümesi olmak üzere $\overline{\text{span} M} = X'$

ve $f \in M$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

İspat: ($\Rightarrow$) $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \{\|x_n\|\}$ sınırlıdır.

ve ayrıca $\forall f \in X'$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x) \Rightarrow \forall f \in M$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

($\Leftarrow$) $\|x_n\|$ sınırlı o.ü $\forall f \in M$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ olsun.

$\sup_n \|x_n\| \le M$

İddia: $\forall f \in X'$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

operatör normu

Herhangi $f \in X'$ için $f \in \overline{\text{span} M}$, $\exists (f_J) \subset \text{span} M$ öyle ki $f_J \xrightarrow{\|\cdot\|_0} f$

$\text{span} M = \{g : \exists g_1, \dots, g_n \in M$ ve $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, $g = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n\}$

Genelliği bozmadan $(f_J) \subset M$ alalım.

Verilen $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N'$ var öyle ki $\forall J > N$ iken $\|f_J - f\| < \varepsilon/3M$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N''$ vardır öyle ki $\forall n > N''$ için $|f_J(x_n) - f_J(x)| < \varepsilon/3$, $f_J \in M$

- Herhangi $f \in X'$ için $\varepsilon$ alalım. $\exists N = \max\{N', N''\}$, $\forall n > N$ için

$$
\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x)| &= |f(x_n) - f_J(x_n) + f_J(x_n) - f_J(x) + f_J(x) - f(x)| \\
&\le |f(x_n) - f_J(x_n)| + |f_J(x_n) - f_J(x)| + |f_J(x) - f(x)| \\
&= |(f - f_J)(x_n)| + |f_J(x_n) - f_J(x)| + |(f_J - f)(x)| \\
&\le \|f_J - f\|_0 \|x_n\| + |f_J(x_n) - f_J(x)| + \|f_J - f\|_0 \|x\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \cdot M = \varepsilon
\end{aligned}
$$

($\|x\| \le M$ olması önceki sorusundan)

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

$X \subset X''$

Örnek: $(x_n) = (e_n) \subset \ell_p$ , $(e_n) \xrightarrow{w} 0$

Herhangi bir $y = f \in \ell_p' = \ell_q$ için $f(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^n y_k = y_n \longrightarrow 0$

——— o ———

$(x_n) = (e_n) \subset \ell_p$

$(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \ell_p' = \ell_q$ , $M = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ $\overline{\operatorname{span} M} = \ell_q$

ayrıca $\|x_n\| = \|e_n\| = 1$ sınırlı

Her $e_k \in M$ için $e_k(e_n) \longrightarrow 0$

$\Big\}$ lemmadan $(x_n) = (e_n) \xrightarrow{w} 0$

Zayıf, Zayıf* yakınsaklığı ($X'$ uzayında)

$(f_n) \subset X'$ fonksiyonel dizisi olsun.

$g \in X''$, $g : X' \longrightarrow \mathbb{R}$
$f_n \longmapsto g(f_n)$

Eğer $\forall g \in X''$ için $g(f_n) \longrightarrow g(f)$ ise $f_n \xrightarrow{w} f$ $X'$ içinde zayıf yakınsaktır denir.

Eğer $\forall x \in X$ için $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ ise $f_n \xrightarrow{w^*} f$ $X'$ içinde zayıf* yakınsaktır denir.

(aslında noktasal yakınsama)

Lemma: $f_n \xrightarrow{w^*} f$ ise $f$ tektir.

İspat: $f_n \xrightarrow{w^*} f$ ve $f_n \xrightarrow{w^*} g$ olsun.

Herhangi $x \in X$ için $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ ve $f_n(x) \longrightarrow g(x)$

$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = 0$ , $\forall x \in X$

$\Rightarrow (f-g)(x) = 0$ , $\forall x \in X$, $f-g \in X'$

$\Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$

HBT'den

Lemma: X Banach uzayı ve $(f_n) \subset X'$ $f$ elemanına zayıf* yakınsasın. O halde $\{\|f_n\|\}$ sınırlıdır.

İspat: $f_n \xrightarrow{w^*} f \Rightarrow \forall x \in X,\ f_n(x) \longrightarrow f(x) \Rightarrow \{f_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ yakınsak
$\Rightarrow$ sınırlıdır.

$(f_n) \subset X'$ operatör ve $\{f_n(x)\}$ yakınsak, sınırlı $\Rightarrow$ Düzgün sınırlılık prensibinden $\|f_n\|$ sınırlıdır.

Lemma: $(f_n) \subset X'$ olsun.

$$f_n \xrightarrow{w} f \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow{w^*} f$$

( Zayıf yıldız'ın ürettiği topoloji en kaba
$\|.\|$ ürettiği en ince )

İspat: $\forall g \in X''$ için $g(f_n) \longrightarrow g(f)$

$$J : X \longrightarrow X''$$
$$x \longmapsto J(x) = g$$

Her $x \in X$ için $J(x) = g \in X''$ dır.

ve $J(x)(f_n) = g(f_n) = f_n(x)$
$\downarrow$
$J(x)(f) = g(f) = f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in X$ için $f_n(x) \longrightarrow f(x) \Rightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f$

Tersi doğru değildir! ( Ödev: $c_0' = \ell_1$ )

$X = c_0 = \{x \in \omega \mid \lim x_n = 0\}$

$(f_n) \subset \ell_1$ fonksiyonel dizisi

$$f_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (x_n) \longmapsto f_n(x) = x_n \quad \Rightarrow f_n \xrightarrow{w^*} 0$$

$f_n \xrightarrow{w^*} 0 \Leftrightarrow \forall x \in c_0$ için $f_n(x) \longrightarrow 0(x) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olmalıdır. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

İddia: $f_n \xrightarrow{w} 0$ değildir.

$\left( f_n \xrightarrow{w} 0 \iff \forall p \in c_0'' \text{ için } p(f_n) \longrightarrow 0 \right)$

Herhangi $g \in c_0' = \ell_1$ için $g(e_J) = y_J$ $\quad y = (y_J) \in \ell_1$

$\|y\|_1 = \sum_{J=1}^{\infty} |g(e_J)| \leq \|g\|$

Böylece $\forall f \in c_0'$ için $\sum_{J=1}^{\infty} |f(e_J)| \leq \|f\|$

$p(f) = \sum_{J=1}^{\infty} (-1)^J f(e_J) \qquad f \in X' = c_0'$

$p(\alpha f + g) = \sum_{J=1}^{\infty} (-1)^J (\alpha f + g)(e_J) = \alpha p(f) + p(g) \implies p$ lineer

Ayrıca $|p(f)| \leq \sum_{J=1}^{\infty} |f(e_J)| \leq \|f\| \implies \|p\| = 1$

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ lineer + sınırlı} \\ p : X' \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies p \in X'' = \ell_\infty$$

$(f_n) \subset X' = c_0' = \ell_1$

$p(f_n) = \sum_{J=1}^{\infty} (-1)^n f_n(e_J) = (-1)^n \subset \mathbb{R}$ dizisi yakınsak değildir.

$\implies f_n \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$

# HİLBERT UZAYLARI

Tanım: H bir vektör uzayı o.ü, $\langle , \rangle$, $( . , . )$

$$\langle , \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(h_1, h_2) \longmapsto \langle h_1, h_2 \rangle$$ bir fonk. aşağıdaki koşulları sağlar ise

iç çarpım uzayı adını alır.

i) $\langle h_1, h_1 \rangle > 0$ ve $h_1 = 0 \Leftrightarrow \langle h_1, h_1 \rangle = 0$

ii) $\langle h_1, h_2 \rangle = \overline{\langle h_2, h_1 \rangle}$

iii) $\langle h_1 + h_2, h_3 \rangle = \langle h_1, h_3 \rangle + \langle h_2, h_3 \rangle$

iv) $\langle \alpha h_1, h_2 \rangle = \alpha \langle h_1, h_2 \rangle$

Eğer $\langle h_1, \alpha h_2 \rangle = \overline{\langle \alpha h_2, h_1 \rangle} = \overline{\alpha \langle h_2, h_1 \rangle} = \overline{\alpha} \langle h_1, h_2 \rangle$

örnek: $(\mathbb{R}^n, .)$ bir iç çarpım uzayıdır.

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Örnek: $l_2$ iç çarpım uzayıdır.

$$x, y \in l_2 \quad , \quad \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$$\langle , \rangle : l_2 \times l_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

i) $\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$
$\geqslant 0$

$x = 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0 \Rightarrow x_n = 0 \, , \forall n \Rightarrow x = 0$

ii) $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = \langle y,x\rangle$

iii) $\langle x+y,z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n+y_n) z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

iv) $\langle \alpha x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n y_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \alpha \langle x,y\rangle$

$\left( l_2 = \{ x=(x_n) : x_n \in \mathbb{C} \},\ \langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \right)$

(parantez içleri $\mathbb{C}$ için)

Örnek: $L^2[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \underset{(\mathbb{C})}{\mathbb{R}} : \int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty \}$

$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad \left( \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx \right)$

i) $\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0 \qquad f=0 \Leftrightarrow \langle f,f\rangle = 0$

$\int_0^1 \overline{f(z)} dz = \overline{\int_0^1 f(z) dz}$

ii) $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle \qquad \left( \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx = \int_0^1 \overline{g(x)\overline{f(x)}} dx = \overline{\langle g,f\rangle} \right)$

iii) $\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

iv) $\langle \alpha f,g\rangle = \alpha \langle f,g\rangle$

(*) $l_2 \subset l_1$

Tanım: İç çarpımın tanımladığı norma göre eğer $H$ tam ise $H$'a Hilbert uzayı denir.

$\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \quad , \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ $H$ üzerinde bir normdur.

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x,x\rangle} = |\alpha| \, \|x\|$

iii) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\langle x,y\rangle$

$(2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle)$

$\overset{(*)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y^2\| = (\|x\| + \|y\|)^2$

(*) Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Cauchy - Schwarz Eşitsizliği : $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

Herhangi $\alpha \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$ için $\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle + \alpha\langle x,y\rangle + \alpha\langle y,x\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle$

$$\|x+\alpha y\|^2 \geq 0$$

$\alpha = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ seçilirse

$$0 \leq \langle x,x\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \left(\frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}\right)^2 \langle y,y\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \leq \langle x,x\rangle \Rightarrow (\langle x,y\rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

- $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ , $\langle x,x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \|x\|_2^2$

  $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_2$ normuna göre Banach olduğundan $\mathbb{R}^n$ Hilbert uzayıdır.

- $(\ell_2, \langle , \rangle)$ $\quad \langle x,x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \|x\|_2^2$ $\quad \ell_2$ tam olduğundan $\ell_2$ hilbert uzayı

- $(L_2(X), \langle , \rangle)$ $\quad \langle f,f\rangle = \int_X (f(x))^2 dx = \|f\|_2^2$ $\quad L_2$ tam old. Hilbert uzayıdır.

- $(C[0,1], \langle , \rangle)$ $\quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ önce tanımlayabilir miyim?


$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\, g(x_k)\, \underset{1/n}{\underset{\parallel}{\Delta x}}$ $\quad$ limiti var mı bak!

$\Rightarrow C[0,1]$ iç çarpım uzayıdır. $\rightarrow (C[0,1], \|.\|_2)$ normlu uzay tam olmadığından

$C[0,1]$ hilbert değildir.

$\left( \text{hilbert} \underset{\not\Leftarrow \ \ell_s}{\Rightarrow} \text{yansımalı} \right)$

<u>Paralel kenar Eşitliği</u>

$$\|x+y\|^2 \pm \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle \pm \langle x-y, x-y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \pm (\|x^2\| - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2) = (2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$$
$$= 4\langle x,y\rangle$$

$\forall x,y \in H$ için $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

$\Rightarrow$ iç çarpım tanımlanır.

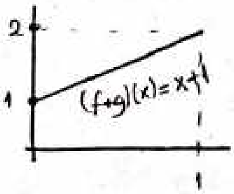
$$\Rightarrow \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

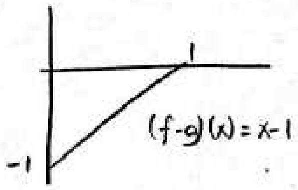
$\leftarrow$ eşitlik sağlanırsa iç çarpım bu olur.

Örnek: $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sup norm iç çarpım tanımlamaz.

$f,g \in C[0,1]$ öyle ki paralelkenar eşitliği sağlanmasın.

$f(x) = x$ , $g(x) = 1$




$\|f+g\|_\infty^2 = 2 \qquad \|f-g\|_\infty^2 = 1$

$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 3$
$\neq$
$2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 4$

paralelkenar özelliği sağlanmadığından en azından 2 eleman için sağlanmadığından sup-norm iç çarpım üretmez.

Örnek: $1 \le p \le +\infty$ , $p \neq 2$ o.ü. $\ell_p$ uzayı iç çarpım uzayı değildir.

$x = e_1$ , $y = e_2$ olsun. $\|e_1\|_p = 1$ , $\|e_2\|_p = 1$

$$\|e_1+e_2\|_p = 2^{1/p} \qquad \|e_1-e_2\|_p = 2^{1/p}$$

$$\|e_1+e_2\|_p^2 + \|e_1-e_2\|_p^2 = 2 2^{2/p} = 2(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2) = 4$$

$$\Leftrightarrow p = 2 \quad \lightning$$

Öğ: $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ normlu uzayı iç çarpım tanımlar.

Herhangi $f$ ve $g \in C[0,1]$ için

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = \int_0^1 |(f+g)(x)|^2 dx + \int_0^1 |(f-g)(x)|^2 dx$$

$$= \int_0^1 (f(x)+g(x))^2 dx + \int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx$$

$$= 2\int_0^1 |f(x)^2| dx + 2\int_0^1 |g(x)|^2 dx = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2$$

paralelkenar eşitliği sağlanır.

$$\Rightarrow \langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2\right) = \frac{1}{4} 4 \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

19 Aralık 2019

Tanım: $H$ Hilbert uzayı, $x,y \in H$ olsun. Eğer $\langle x,y\rangle = 0$ ise $x \perp y$ ($x$ $y$'ye diktir) denir.

Lemma: Eğer $x \perp y$ ve $x \perp z$ ise $x \perp y+z$ ve $x \perp \lambda y$ olur.

İspat: $x \perp y+z$ için $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle = 0+0=0$

$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x,y\rangle = 0$

Lemma: $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

İspat: $(\Rightarrow)$ $x \perp y$ olsun. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underset{0}{\underbrace{\langle x,y\rangle}} + \underset{0}{\underbrace{\langle y,x\rangle}} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$(\Leftarrow)$ $\left.\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|(-1)y\|^2 \end{aligned}\right\}$ $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = 0$

Paralelkenar Eşitliğinin Kompleks Versiyonu:

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ cisim, $(\mathbb{C},\|.\|)$ normlu uzay / Banach, $(\mathbb{C},\langle,\rangle)$ iç çarpım uzayı / Hilbert
↳ modül

$\langle z_1,z_2\rangle = x_1x_2+y_1y_2$ ⟶ kompleksin modül tanımı

$\langle z_1,z_1\rangle = x_1^2+y_1^2 = \|z_1\|^2$

$\langle \lambda z_1,z_2\rangle = \lambda x_1x_2+\lambda y_1y_2 = \lambda\langle z_1,z_2\rangle$ , ! $\lambda\in\mathbb{R}$ olmalı

$\langle z_1,z_2+z_3\rangle = \langle z_1,z_2\rangle + \langle z_1,z_3\rangle$

$$\|z_1+z_2\|^2+\|z_1-z_2\|^2+i\|z_1+iz_2\|^2+i\|z_1-iz_2\|^2 = \|z_1\|^2+\langle z_1,z_2\rangle+\langle z_2,z_1\rangle+\|z_2\|^2+\|z_1\|^2-\langle z_1,z_2\rangle$$
$$-\langle z_2,z_1\rangle+\|z_2\|^2+i\left(\|z_1\|^2+\langle z_1,iz_2\rangle+\langle iz_2,z_1\rangle+\|iz_2\|^2\right)+i\left(\|z_1\|^2-\langle z_1,iz_2\rangle-\langle iz_2,z_1\rangle+\|iz_2\|^2\right)$$
$$=2\left(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2\right)+2i\left(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2\right)$$

- $\langle z_1,z_2\rangle = \frac{1}{4}\left(\|z_1+z_2\|^2-\|z_1-z_2\|^2+i\|z_1+iz_2\|^2-i\|z_1-iz_2\|^2\right)$

Tanım: H Hilbert uzayı ve $H \subset H$ alt kümesi olsun.

$$H^{\perp (perp)} = \{z\in H : \forall m\in H : z\perp m\}$$

Lemma: $H^{\perp}$, H'ın kapalı bir alt uzayıdır.

$z_1,z_2\in H^{\perp}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. $\lambda z_1+z_2\in H^{\perp}$ ?

Her $m\in H$ için $z_1\perp m$, $z_2\perp m \Rightarrow \lambda z_1\perp m$ ve $z_2\perp m \Rightarrow \lambda z_1+z_2\perp m \Rightarrow \lambda z_1+z_2\in H^{\perp}$

$z\in\overline{H^{\perp}}$ bir eleman olsun. $\exists (z_n)\subset H^{\perp}$ öyle ki $z_n \xrightarrow{\|.\|} z$ ⟶ iç çarpımın ürettiği norm

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>N$ için $\|z_n-z\|<\varepsilon$

İddia: $z\in H^{\perp}$'tir.

Herhangi $m\in H$ olsun. $\langle z-z_n,m\rangle=0 \Rightarrow z\in H^{\perp}$
$$\| $$
$\langle z,m\rangle - \langle z_n,m\rangle = 0$
↳ bu zaten 0

Elimizde $\lim z_n = z \iff \|z_n - z\| \longrightarrow 0$

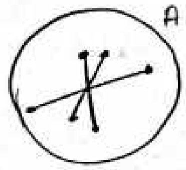
$\|z_n - z\|^2 = \langle z_n - z, z_n - z \rangle \longrightarrow 0$

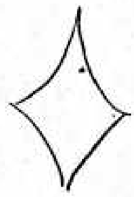
$|\langle z - z_n, m\rangle| \leq \|z - z_n\| \|m\|$ (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

$\Rightarrow \langle z - z_n, m \rangle = 0 \quad , \forall n > N$

$\Rightarrow \langle z, m \rangle = 0 \Rightarrow z \perp m \Rightarrow z \in H^\perp \Rightarrow H^\perp$ kapalı

Tanım: A kümesi, $x, y \in A$ için $\alpha x + (1-\alpha) y \in A \quad , \forall \alpha \in (0,1)$ oluyorsa konvekstir.




Lemma: H Hilbert uzayı, A kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. A içinde $\|x\| = \inf\{\|z\| : z \in A\}$ eşitliğini sağlayan tek bir x noktası vardır.

İspat: $\inf\{\|z\| : z \in A\} = d \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ olsun.

$(z_n) \subset A$ bir dizi olalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $d \leq \|z_n\| \leq d + 1/n$ koşulu sağlasın.

A konveks old. $\dfrac{z_n + z_m}{2} \in A$

$$\left\|\frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2 \geq d^2 \Rightarrow \|z_n + z_m\|^2 \geq 4d^2 \quad \text{ve} \quad -\|z_n + z_m\|^2 \leq -4d^2$$

$$\|z_n + z_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = 2\left(\|z_n\|^2 + \|z_m\|^2\right)$$

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2\left(\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(d + \frac{1}{m}\right)^2\right) - 4d^2$$

$$= 2\left(2d^2 + \underbrace{2\frac{d}{n} + 2\frac{d}{m} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}_{\alpha}\right) - 4d^2 = \alpha_{n,m} \text{ (oldukça küçük)}$$

$\Rightarrow \|z_n - z_m\| < \varepsilon \Rightarrow (z_n)$ Cauchy $\Rightarrow (z_n) \longrightarrow d$ yakınsak

$(z_n) \subset A \Rightarrow z \in \bar{A} = A$

$z_n \longrightarrow z \Rightarrow \|z_n\| \longrightarrow \|z\|$

$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = \|z\|$ , $d \leq \|z_n\| \leq d + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|z_n\| = d = \|z\|$

- $z$ tektir

$y \in A$ olsun öyle ki $\|y\| = d$ koşulunu sağlasın.

İddia: $z = y$

$\frac{y+z}{2} \in A$ $\quad d \leq \left\|\frac{y+z}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}(\|y\| + \|z\|) = d \Rightarrow \frac{\|y+z\|}{2} = d$

$$\left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{z}{2}\right\|^2\right)$$

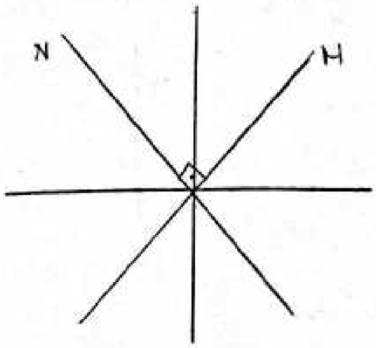
$$d^2 + \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 = 2\left(\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}\right) \Rightarrow \|y-z\| = 0 \Rightarrow y = z$$

$P^2 = P : H \longrightarrow H$ koşulunu sağlayan operatöre izdüşüm denir.

Eğer H Hilbert uzayı ise P dik izdüşüm denir.

$H = \ker P \oplus R(P)$

$\forall h \in H$ için $\exists m_1 \in \ker P$, $\exists m_2 \in R(P)$ öyle ki $h = m_1 + m_2$, $\ker(P) \cap R(P) = \{0\}$




H kapalı altuzay $\subset \mathbb{R}^2$

$P : H \longrightarrow H$

$R(P) = H \qquad H \oplus N = \mathbb{R}^2$

Lemma: H Hilbert uzayı, $H \subset H$ kapalı alt uzay olsun. $P : H \longrightarrow H$ $P(H) = H = R(P)$ ve $P^{-1}(0) = \ker P = H^{\perp}$ koşullarını sağlayan bir P projeksiyonu vardır.

İspat: $h \in H$ olsun.

$A_h = h + H = \{h + m : m \in H\}$

$A_h$ kapalıdır: $x \in \overline{A_h}$, $\exists (x_n) \subset A_h$ öyle ki $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

$x_n = h + m_n$, $(m_n) \subset H$ dizi $m_n = x_n - h$

$m = \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} x_n - h = x - h \Rightarrow x = m + h \Rightarrow x \in A_h$

$A_h$ konvekstir: Herhangi $x_1, x_2 \in A_h$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun.

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(h + m_1) + (1-\alpha)(h + m_2)$$

$$= h + \underbrace{\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2}_{\in H \text{ altuzay old.}} = h + m \in A_h$$

$P: H \longrightarrow H$

$h \longmapsto Ph \in H$

$h - Ph$ var ve tektir.

$h - Ph \in H^{\perp}$

Lemma: A kapalı, konveks ise $\|x\| = \inf\{\|y\| : y \in A\}$ koşulunu sağlayan tek $x$ vardır.

$A_h$ konveks ve kapalı $\|h - Ph\| = \inf\{\|h - m\| : m \in H\}$ (Lemmadan)

bir tane $h - Ph$ elemanı vardır.

İddia: $h - Ph \in H^{\perp}$

Lemma: Bir iç çarpım uzayında $x \perp y$ için her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|y\| \leq \|y + \alpha x\|$ olması gerek ve yeter şarttır.

Yani, $y \perp x \iff \|y\| \leq \|y + \alpha x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

İspat: $L = span\{x\}$ olsun.

$A = \{y + \alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\} = y + L$

$\longrightarrow$ alt uzay / kapalı

$\longrightarrow$ kapalı + konveks

$\inf\{\|y + \alpha x\| : \alpha \in \mathbb{R}\} \leq \|y\|$ olur.

$\|y + \alpha x\|^2 = \langle y + \alpha x, y + \alpha x \rangle = \|y\|^2 + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|x\|^2$

$x \perp y \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|y + \alpha x\|^2 = \|y\|^2 + \alpha^2 \|x\|^2$

$\Rightarrow \|y\| \leq \|y + \alpha x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\langle x, y \rangle \neq 0 \Rightarrow \|y + \alpha x\|^2 = \|y\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|x\|^2$

$\alpha = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$ olsun. $\Rightarrow \|y + \alpha x\|^2 = \|y\|^2 - \dfrac{(\langle x, y \rangle)^2}{\|x\|^2}$

$\exists \alpha$ öyle ki $\|y + \alpha x\| < \|y\|$

iddia devamı

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\|h-Ph\|}_{y \text{ gibi}} \leq \|(h-Ph)+\alpha m\| \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad \|h-(Ph-\alpha m)\|, \ \forall m \in H \\ \qquad\qquad\qquad \Uparrow \\ \qquad\qquad\qquad 3 \end{array}\right\} \Rightarrow h-Ph \perp m \quad \forall m \in H$$

$\Rightarrow h-Ph \in H^{\perp}$

Lemmadan

iddia: $P: H \longrightarrow H$

$h \longmapsto Ph$ lineerdir.

$$\left\{\begin{array}{l} P(\overbrace{\alpha h_1 + h_2}^{h_3}) \in H \\ \alpha P(h_1) + P(h_2) \in H \end{array}\right. \quad \text{ve} \quad \left\{\begin{array}{l} h_3 - Ph_3 \in H^{\perp} \\ h_3 - (\alpha P(h_1) + P(h_2)) \in H^{\perp} \end{array}\right. \quad \left( h_3 - \alpha P(h_1) - P(h_2) = \alpha \overbrace{(h_1 - Ph_1)}^{\in H^{\perp}} + \underbrace{(h_2 - Ph_2)}_{\in H^{\perp}} \in H^{\perp} \right)$$

$$\underbrace{h_3 - Ph_3}_{\in H^{\perp}} - \underbrace{h_3 + (\alpha P(h_1) + P(h_2))}_{\in H^{\perp}} = -(Ph_3 - \alpha P(h_1) - P(h_2)) \in H^{\perp}$$

Ayrıca $Ph_3 - \alpha P(h_1) - P(h_2) \in H$

$\Rightarrow P(h_3) - (\alpha P(h_1) + P(h_2)) \in H \cap H^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow P(\alpha h_1 + h_2) = \alpha P(h_1) + P(h_2)$

iddia: $P^2 = P$ 'dir.

Herhangi $h \in H$ alalım. $P(Ph) = Ph$ ? $\quad Ph \in H$

Herhangi $m \in H$ için $Pm = m$ ise $P^2 = P$ olur.

$m - Pm \in H \cap M^{\perp} = \{0\} \Rightarrow Pm = m$

---

$h = h - Ph + Ph$

$= (Ph) + (h - Ph) \in H + H^{\perp}$

$\|h\|^2 = \langle Ph + (h-Ph), Ph + (h-Ph) \rangle = \|Ph\|^2 + 2\langle Ph, h-Ph \rangle + \|h-Ph\|^2 = \|Ph\|^2 + \|h-Ph\|^2$

Pisagor sağlanır ve $P$ diktir.

Riest Temsil Teoremi : Her sınırlı fonksiyonel $f \in H'$ için $f(h) = \langle h, x \rangle$ ve $\|f\| = \|x\|$ koşullarını sağlayan tek bir $x \in H$ vardır.

$H = H'$

İspat: $f \in H'$, $f: H \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer sınırlı dönüşüm

$M = \ker f = f^{-1}(0)$

- $f = 0 \Rightarrow M = \ker f = H$
- $f \neq 0 \Rightarrow M \neq H$, $M^{\perp} \neq 0$ ⟶ Hahn-Banach'tan $f(z) \neq 0$ as seçtik.

bir tane $0 \neq z \in M^{\perp}$ alalım.

$y = f(z)h - f(h)z$ $h \in H$

$f(y) = f(f(z)h - f(h)z) = f(z)f(h) - f(h)f(z) = 0 \Rightarrow y \in \ker f = M$

O halde $y \perp z$

$0 = \langle y, z \rangle = \langle f(z)h - f(h)z, z \rangle = f(z)\langle h, z \rangle - f(h)\|z\|^2 \Rightarrow \langle h, z \rangle = \frac{f(h)}{f(z)}\|z\|^2$

$x \in H$ o.ü $x = \frac{f(z)}{\|z\|^2} z$ olsun. $f(h) = \frac{f(z)}{\|z\|^2}\langle h, z \rangle = \langle h, \frac{f(z)}{\|z\|^2} z \rangle = \langle h, x \rangle$

- $|f(h)| = |\langle h, x \rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|h\| . \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \|x\|$ ①
- $f(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|f\|$ ②

1 ve 2'den $\|x\| = \|f\|$ olur.

$x_1$ ve $x_2 \in H$ o.ü $f(h) = \langle h, x_1 \rangle = \langle h, x_2 \rangle \Rightarrow \langle h, x_1 \rangle - \langle h, x_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle h, x_1 - x_2 \rangle = 0$ , $\forall h$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in H^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ⟶ Tüm uzayın perpi sadece 0 dır.

ÖR: $\{1, t, t^2\}$ $\quad P_2 = \{ p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \leq 2.$ dereceden polinomlar$\}$

$C[0,1]$

$L_2[0,1]$

lineer bağımsız

$\|1\|_2 = 1$

$\|t\|_2 = \left( \int_0^1 t^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\|t^2\|_2 = \left( \int_0^1 t^4 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left\{ 1, \frac{t}{1/\sqrt{3}}, \frac{t^2}{1/\sqrt{5}} \right\} = \{ 1, \sqrt{3}t, \sqrt{5}t^2 \}$ birim lineer bağımsız.

$\langle 1, \sqrt{3}t \rangle = \int_0^1 \sqrt{3}t.1dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0 \Rightarrow 1 \not\perp \sqrt{3}t$

$v_1 = 1 = x_1$

$v_2 = x_2 - \langle v_1, x_2 \rangle v_1$

$= \sqrt{3}t - \langle 1, \sqrt{3}t \rangle .1 = \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$v_3 = x_3 - \langle v_1, x_3 \rangle v_1 - \langle v_2, x_3 \rangle v_2 = \sqrt{5}t^2 - \underbrace{\langle 1, \sqrt{5}t^2 \rangle}_{\frac{\sqrt{5}}{3}} 1 - \underbrace{\langle \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{5}t^2 \rangle}_{\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{12}} \left( \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$= \sqrt{5}t^2 - \frac{\sqrt{5}}{3} 1. - \frac{\sqrt{15}}{12} \left( \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Böylece $\left\{ 1, \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{5}t^2 - \frac{\sqrt{5}}{4}t - \frac{5}{24}\sqrt{5} \right\}$ kümesi ortonormaldir.

31 Aralık 2019

Gram-Schmidt Süreci: $\{x_n\}$ lineer bağımsız dizi olsun. Birim kabul edelim.

$v_1 = x_1$

$v_2 = x_2 - \langle v_1, x_2\rangle v_1$

$\vdots$

$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle v_k, x_n\rangle v_k$

Örn: $L^2[-1,1]$ Hilbert uzayı $\{t^n\}$ lineer bağımsız

$$\alpha_1 t^{n_1} + \alpha_n t^{n_2} + \dots + \alpha_k t^{n_k} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$v_1 = x_1 = 1$

$v_2 = x_2 - \langle v_1, x_2\rangle v_1 = t - \langle 1, t\rangle 1 = t - \left(\int_{-1}^{1} 1.t\,dt\right) \cdot 1 = t$

$v_3 = x_3 - \langle v_1, x_3\rangle v_1 - \langle v_2, x_3\rangle v_2$

$= t^2 - \left(\int_{-1}^{1} 1.t^2 dt\right)1 - \left(\int_{-1}^{1} t.t^2 dt\right) = t^2 - \frac{2}{3}$

• Mesela $t^5$ birim mi?

$\|t^5\|_2^2 = \int_{-1}^{1} t^5.t^5 dt = \langle t^5, t^5\rangle$

$= 2/11$

$\{v_n\}$'ler ortogonal fakat birim değildir. Ortonormal $\{v_n\}$ dizisine Legendre polinomları adı verilir.

Orthonormal Dizi: $l_2$ uzayında $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ ↳ n.terim

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \Leftrightarrow e_n \perp e_m, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m$$

$H$ Hilbert uzayında $\{x_n\}$ orthonormal bir dizi olsun.

$H_k = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$

$$P_k : H \longrightarrow H \qquad P_k x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$
$$x \longmapsto P_k \in H_k$$

$$H_k^{\perp} \ni z = x - P_k x = x - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$

$$z \in H_k^{\perp} \Leftrightarrow z \perp m, \quad \forall m \in H_k$$
$$\Leftrightarrow z \perp x_j, \quad \forall j = 1, \dots, k$$

Herhangi $j = 1, \dots, k$ için $\langle z, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, x_j \rangle$

$$= \langle x, x_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle$$

$$0 = \langle z, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = \langle x, x_j \rangle$$

$\Rightarrow P_k x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_j \rangle x_j$ ve $P_k$ dik izdüşümdür.

- $H = \operatorname{Ker}(P_k) + R(P_k) = H_k^{\perp} \oplus H_k$

$$\|x\|^2 = \|P_k x\|^2 + \|x - P_k x\|^2 \Rightarrow \|P_k x\| \le \|x\|$$

$$\|P_k x\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_j \rangle x_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i}_{\alpha} \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \langle x, x_j \rangle \left( \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle \langle x_j, x_i \rangle \right) = \sum_{j=1}^{k} |\langle x, x_j \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \|P_k x\| = \left( \sum_{j=1}^{k} |\langle x, x_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \le \|x\|$$

$$\lim_{k \to \infty} \Rightarrow \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \le \|x\| \qquad \text{“Bessel Eşitsizliği”}$$

Tanım: H Hilbert uzayı $\{x_n\}$ orthonormal bir dizi olsun. Eğer $\forall x \in H$;

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ şeklinde yazılabiliyor ise $\{x_n\}$ dizisine H'ın orthonormal bazı denir.

Teorem: H Hilbert uzayı, $\{x_n\}$ orthonormal dizisi verilsin. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) $\{x_n\}$ orthonormal bazdır.

ii) $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uzayı H içinde yoğundur.

iii) x noktası her $x_n$'e dik ise $x=0$ dır.

İspat: $H = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{m \in H : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_J,\ \exists x_{n_1}, \dots, x_{n_J},\ m = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i x_{n_i}\}$

$(i \Rightarrow ii)$ $\{x_n\}$ orthonormal baz old. göre $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$

$$x = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \langle x, x_n \rangle x_n}_{\in H} \Rightarrow x \in \overline{H} \Rightarrow H \subset \overline{H} \Rightarrow H = \overline{H}$$

$(ii \Rightarrow iii)$ $\overline{H} = H$ o.ü $x \perp x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ olsun. $\Rightarrow x \perp m$ $\forall m \in M$ $(x \in H^{\perp})$ ve $x \in \overline{H}$ old. göre $\exists (y_n) \subset N$ öyle ki $\lim y_n = x$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, \lim y_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

$(iii \Rightarrow i)$ $x \perp x_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$ koşulu olsun. İddia: $x = \lim_{k\to\infty} P_k(x)$

$\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ Cauchy'dir. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall m > k > N$ için

$$\|P_m(x) - P_k(x)\| = \left\| \sum_{J=1}^{m} \langle x, x_J \rangle x_J - \sum_{J=1}^{k} \langle x, x_J \rangle x_J \right\| = \left\| \sum_{J=k+1}^{m} \langle x, x_J \rangle x_J \right\|^2$$

$$= \left( \left\langle \sum_{J=k+1}^{m} \langle x, x_J \rangle x_J, \sum_{i=k+1}^{m} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle \right)^{1/2} = \left( \sum_{J=k+1}^{m} |\langle x, x_J \rangle|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$$

Bessel eşitsizliğinden Cauchy

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} P_k(x) = y$ olsun.

Bessel Eşitsizliği: $\left( \sum_{J=1}^{\infty} |\langle x, x_J \rangle|^2 \right)^{1/2} \le \|x\|$

$\Leftrightarrow S_n$ yakınsak $\Leftrightarrow S_n$ Cauchy

$y=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,x_j\rangle x_j \quad , \quad z=x-y\in H$

$$= x-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,x_j\rangle x_j$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $\quad \langle z,x_n\rangle = \langle x-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,x_j\rangle x_j , x_n\rangle$

$$= \langle x,x_n\rangle - \sum_{j=1}^{\infty}\langle x,x_j\rangle\langle x_j,x_n\rangle$$

$$= \langle x,x_n\rangle - \langle x,x_n\rangle = 0 \Rightarrow z\perp x_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Kabulden $\quad z=x-y=0 \Rightarrow x=y$

$$\Rightarrow x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,x_j\rangle x_j$$

⊛ Parseval Eşitsizliği: $P_k$ dik izdüşüm

$\|x\|^2 = \|x-P_kx\|^2 + \|P_kx\|^2$

$$= \|x-\sum_{j=1}^{k}\langle x,x_j\rangle x_j\|^2 + \sum_{j=1}^{k}|\langle x,x_j\rangle|^2$$

$$\lim_{k\to\infty}\|x\|^2 = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\|x-\sum_{j=1}^{k}\langle x,x_j\rangle x_j\|^2}_{\|x-P_kx\|^2} + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}|\langle x,x_j\rangle|^2$$

$$\|x\|^2 = 0+\sum_{j=1}^{\infty}|\langle x,x_j\rangle|^2 \Rightarrow \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\langle x,x_j\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$\{v_n\}$ Legendre polinomları $L_2[-1,1]$ uzayında orthonormal bir dizidir.

$H=\text{span}\{t^n : n\in\mathbb{N}\} = \text{span}\{v^n : n\in\mathbb{N}\}$

iddia: $\{v_n\}$ $L_2[-1,1]$ uzayında orthonormal bazdır.

Lusin Teoremi: Her integrollenebilir f fonksiyona oldukca yakın sürekli bir fonksiyon vardır.

$$\overline{C[-1,1]} = L_2[-1,1]$$

Weierstrass Yaklaşım Teoremi: Her sürekli fonksiyona çok yakın bir polinom vardır.

$$\overline{P[-1,1]} = C[-1,1]$$

$\forall f \in L_2[-1,1]$ için $\exists g \in C[-1,1]$ öyle ki $\|f-g\| < \varepsilon/2$ (Lusin)

$\forall g \in C[-1,1]$ için $\exists p \in P[-1,1]$ öyle ki $\|g-p\| < \varepsilon/2$

$\|f-p\| \leq \|f-g\| + \|g-p\| < \varepsilon$ ve $p \in H \Rightarrow f \in \overline{H}$

$\Rightarrow L_2[-1,1] = \overline{H}$

$\Rightarrow$ Bir önceki teoremden Legendre polinomları $L_2[-1,1]$ uzayında orthonormal bazdır.

## OPERATÖRLER

$T: H \longrightarrow H$ sınırlı operatör olsun.

$T': H' \longrightarrow H'$ $g \in H$

$H \ni g_1 = f \longrightarrow T'f = g_2$

$h \in H$ $(T'f)(h) = \langle h, g_2 \rangle$

$\quad\quad\quad \|$

$f(Th) = \langle g_1\, Th \rangle$

$\Rightarrow \langle g_1, Th \rangle = \langle h, g_2 \rangle = \langle h, T'g_1 \rangle$

(k

ÖRNEK: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y,\ y+z,\ x+z)$ lineer sınırlı

$$\langle \vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle T'\vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1+y_2,\ y_2+y_3,\ y_1+y_3) \rangle$$

$$= x_1(y_1+y_2) + x_2(y_2+y_3) + x_3(y_1+y_3)$$

$$= (x_1+x_3)y_1 + (x_1+x_2)y_2 + (x_2+x_3)y_3$$

$$= \langle (x_1+x_3,\ x_1+x_2,\ x_2+x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$$

$$= \langle T'\vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$T': H \longrightarrow H$

$(x,y,z) \longmapsto (x+z,\ x+y,\ y+z)$

$$T = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T' = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Hilbert Uzaylarında Operatörler

$T: H \longrightarrow H$

$T': H' = H \longrightarrow H' = H$

$f \longmapsto T'f : H \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle h, g\rangle = T'f(h) = f(T(h)) = \langle f, Th\rangle$

$\parallel$

$\langle h, T'f\rangle$

$\boxed{\langle f, Th\rangle = \langle h, T'f\rangle}$

Ör: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y+z, x+z)$

$$T = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T' = A^T$$

Ör: $T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$(x_n) \longmapsto (x_2, x_3, \ldots)$

$T(x+ay) = T((ax_n + y_n)) = (ax_2 + y_2, ax_3 + y_3, \ldots) = a(x_2, x_3, \ldots) + (y_2, y_3, \ldots) = aTx + Ty$ lineer

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2 \Rightarrow \|T\| \le 1$$

$x = e_2 = (0,1,0,\ldots)$ olalım. $\|x\|_2 = 1$, $\|Tx\|_2 = \|e_1\|_2 = 1 \Rightarrow \|T\| = 1$

$\therefore T \in L(\ell_2) = L(\ell_2, \ell_2)$

$T': \ell_2 \longrightarrow \ell_2$, $T'x = z$ diyelim.

$\langle x, Ty\rangle = \langle T'x, y\rangle$, $\forall x,y \in \ell_2$

$\langle x, Ty\rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots), (y_2, y_3, \ldots)\rangle = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots$

$\langle T'x, y\rangle = \langle (z_1, z_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)\rangle = z_1 y_1 + z_2 y_2 + \cdots$

$T'x = (z_1, z_2, z_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

Teorem: H Hilbert uzayında T operatörü için $\|T\| = \|T'\|$ ve $\|T'T\| = \|T\|^2$ 'dir.

$$\|T'\| = \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f\in H'}} \|T'f\| = \sup_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f\in H'}} \sup_{\substack{x\in H \\ \|x\|\leq 1}} \|T'f(x)\| = \sup_f \sup_x \|f(Tx)\| \leq \sup_f \sup_x \|f\|\|T\|\|x\|$$
$$\leq \|T\|$$

$$\therefore \|T'\| \leq \|T\|$$

$$T'' = (T')' = S'$$

$$\langle T''x, y\rangle = \langle S'x, y\rangle = \langle x, Sy\rangle = \langle x, T'y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x,y \in H$$

$$\langle T''x, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle (T''-T)(x), y\rangle = 0 \Rightarrow T'' = T$$

$$\|T\| = \|T''\| = \|(T')'\| \leq \|T'\| \Rightarrow \boxed{\|T'\| = \|T\|}$$

$$\|T'T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T'Tx\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T'\|\|T\|\|x\| \leq \|T'\|\|T\| = \|T\|\|T\| = \|T\|^2$$

$$\|Tx\|^2 = |\langle Tx, Tx\rangle| = |\langle T'Tx, x\rangle| \underset{\text{CS eşitsizliği}}{\leq} \|T'Tx\|\|x\| \Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T'T\|$$
$$\Rightarrow \|T\|^2 = \|T'T\|$$

Tanım: 1) Her $x,y \in H$ için $\langle T'x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$ ise T'ye kendine eşlenik (self adjoint) operatör denir.

2) $T'T = T^*T = TT^* = TT'$ ise T normal operatördür.

3) $T'T = TT' = I$ ise T'ye uniter/birimsel operatör denir.

Töplitz Teoremi (Toeplitz Teoremi): Kendine eşlenik operatör sınırlıdır.

İspat: $T$ sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $G(T)$ kapalıdır (KGT)

$$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow 0 \\ Tx_n \longrightarrow w \end{array}\right\} \Rightarrow w=0$$

$x_n \longrightarrow 0$ olsun. Herhangi $z \in H$ için $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle x_n, z\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, z\rangle}_{\text{iç çarpım sürekli}} = \langle 0, z\rangle = 0$

İddia: İç çarpım süreklidir.

$$\langle , \rangle : H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \langle x,y\rangle$$

Herhangi $(x_0,y_0) \in H\times H$ alalım. $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ öyle ki $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$

$\Rightarrow |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| < \varepsilon$

Verilen $\varepsilon>0$, $\exists \delta = \delta(y_0, x_0, \varepsilon)$ seçelim. $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_{H\times H} = \max\{\|x-x_0\|, \|y-y_0\|\} < \delta$

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| &= |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y\rangle + \langle x_0,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \\ &\leq |\langle x,y\rangle - \langle x_0,y\rangle| + |\langle x_0,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle| \\ &= |\langle x-x_0,y\rangle| + |\langle x_0,y-y_0\rangle| \\ &\overset{C.S.E}{\leq} \|x-x_0\|\,\|y\| + \|x_0\|\underbrace{\|y-y_0\|}_{<\delta} < \underbrace{\delta(\delta+\|y_0\|) + \|x_0\|\delta}_{\varepsilon} \end{aligned}$$

$\langle Tx_n,y\rangle = \langle x_n, T'y\rangle = \langle x_n, Ty\rangle$

$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ty\rangle = 0$

$\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n,y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, y\rangle = \langle w,y\rangle$

$\Rightarrow \langle w,y\rangle = 0 \quad \forall y \in H$

$\Rightarrow w=0$

T ve S iki operatör olsun.

$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z \quad , \quad X \xrightarrow{S \circ T} Z$

$Z' \xrightarrow{(S\circ T)'} X'$

$Z' \xrightarrow{S'} Y' \xrightarrow{T'} X' \quad \Rightarrow (S\circ T)' = T' \circ S'$

$(T'T)' = T'(T')' = T'T'' = T'T \Rightarrow T'T$ kendine eşlenik

$(T+T')' = T' + (T')' = T' + T'' = T + T' = T' + T \Rightarrow T+T'$ kendine eşlenik.

Teorem: $T: H \longrightarrow H$ sınırlı operatör aü her $x \in H$ için $\langle x, Tx\rangle = 0 \Rightarrow T=0$

[ HBT'den $x \neq 0$, $\exists f \in H' \ni f(x) \neq 0 = \langle x, f\rangle = \langle x, Ty\rangle$ ]

- T kendine eşlenik olsun. ($\Rightarrow$ sınırlı). Her $x \in H$ için $\langle x, Tx\rangle = 0$ koşulunu sağlasın.

Herhangi $x,y \in H$ için $x+y \in H$ ve $0 = \langle x+y, T(x+y)\rangle = \langle x+y, Tx\rangle + \langle x+y, Ty\rangle$

$= \underbrace{\langle x, Tx\rangle}_{0} + \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle + \underbrace{\langle y, Ty\rangle}_{0}$

$= \langle x, Ty\rangle + \langle y, Tx\rangle \underset{\substack{\downarrow \\ \text{kendine eşlenik}}}{=} 2\langle x, Ty\rangle$

$\Rightarrow$ Her $x,y \in H$ için $\langle x, Ty\rangle = 0 \Rightarrow Ty = 0$
$\Rightarrow T = 0$

- T sınırlı ve $\forall x \in H$ için $\langle x, Tx\rangle = 0$ koşulunu sağlasın.

$A = T + T'$ kendine eşlenik ve Her $x \in H$ için $\langle x, Ax\rangle = \langle x, (T+T')x\rangle$

$= \langle x, Tx\rangle + \langle x, T'x\rangle$

$= \langle x, Tx\rangle + \langle Tx, x\rangle = 0$

$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow T' = -T$

$B = iT \Rightarrow B' = (iT)' = -iT' = -i(-T) = iT = B \Rightarrow B$ kendine eşlenik

Her $x \in H$ için $\langle x, Bx\rangle = \langle x, iTx\rangle = -i\langle x, Tx\rangle = 0 \Rightarrow B = iT = 0$
$\Rightarrow T = 0$

(*)

Teorem: $T=T' \iff \langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall x\in H$

($\Leftarrow$) $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$

$$\langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle = \langle x, T'x\rangle \qquad \forall x\in H$$

$$\Rightarrow \langle x, (T-T')x\rangle = 0 \quad \forall x\in H$$

$$\Rightarrow (T-T')x=0, \quad \forall x\in H$$

$$\Rightarrow T-T'=0 \Rightarrow T=T'$$

($\Leftarrow$) $T=T'$ olsun.

$$\langle Tx, x\rangle = \langle T'x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \Rightarrow \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R}$$

Lemma: $\underbrace{T \text{ normal}}_{TT'=T'T}$ operatör $\iff \|Tx\| = \|T'x\|, \ \forall x\in H$

($\Rightarrow$) $TT' = T'\cdot T$ olsun.

$$\underbrace{\langle T'x, T'x\rangle}_{\|T'x\|^2} = \langle TT'x, x\rangle = \langle T'Tx, x\rangle = \underbrace{\langle Tx, Tx\rangle}_{\|Tx\|^2} \Rightarrow \|Tx\| = \|T'x\|, \ \forall x\in H$$

($\Leftarrow$) $\|Tx\| = \|T'x\|, \ \forall x\in H$ olsun.

$$\langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|T'x\|^2 = \langle T'x, T'x\rangle \Rightarrow \langle Tx, Tx\rangle = \langle T'x, T'x\rangle$$

$$\langle T'Tx, x\rangle = \langle TT'x, x\rangle \Rightarrow T'T = TT'$$

Tanım: $T: H \longrightarrow H$ bir operatör olsun. Eğer her $x\in H$ için $\langle x, Tx\rangle \geq 0$ ise $T$'ye pozitif operatör denir.

Lemma: $P$ izdüşüm olsun. $P$ dik izdüşümdür $\iff P$ kendine eşleniktir. Ayrıca dik izdüşüm pozitif.

? dik izdüşüm $\begin{cases} R(P)=H \\ H = \ker P \oplus R(P) \\ \quad = H^{\perp}\oplus H \\ P^2 = P \end{cases}$

İspat: ($\Rightarrow$) $P$ dik izdüşüm olsun.

$$H = \{Px : x\in H\}, \quad H^{\perp} = \{(I-P)x : x\in H\}$$

$$P(H) \perp (I-P)(H)$$

$\Rightarrow$ Her $x\in H$ için $\langle Px, (I-P)x\rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle Px, x-Px\rangle = \langle Px, x\rangle - \langle Px, Px\rangle = 0 \Rightarrow \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow P$ pozitif ayrıca $\langle Px, x\rangle \in \mathbb{R}$ old. ((*) tan.) kendine eşlenik

($\Leftarrow$) $P$ kendine eşlenik izdüşüm olsun.

Herhangi $x \in H$ için
$$\begin{aligned}\langle Px, (I-P)x\rangle &= \langle Px, x\rangle - \langle Px, Px\rangle \\ &= \langle Px, x\rangle - \langle P'Px, x\rangle \\ &= \langle Px, x\rangle - \langle P^2x, x\rangle \\ &= \langle Px - P^2x, x\rangle \\ &\overset{P^2=P}{=} \langle (P-P^2)x, x\rangle = 0\end{aligned}$$

## ÖLÇÜM TEORİSİ

Teorem: $f:[a,b]\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon>0$ için $\exists P$ parçalanışı var ve $\ddot{U}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon \Leftrightarrow f$'e Riemann int'bilirdir.

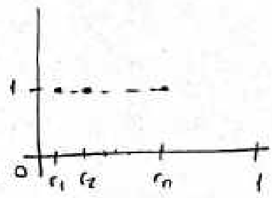
Kalkülüsün Temel Teoremi 1: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonk. olsun. $f$ int. bilir ise $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ süreklidir.

Kalkülüsün Temel Teoremi 2: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonk. olsun. $F$ fonk. diff'bilirdir, $F'(x) = f(x)$ ve $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

1) Limit olmayabilir
2) Limit vardır fakat $f$ int'bilir değildir.
3) Limit vardır ve $f$ int'bilir fakat eşit değildir.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ilk } n \text{ tane rasyonel} \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

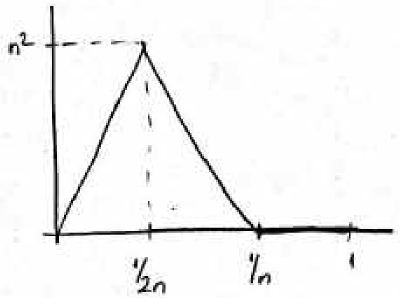



$f_n(x)$ fonk. sonlu nokta hariç sürekli $\Rightarrow$ int'bilir

ve $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{I}\mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3 x, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ -2n^3\left(x - \frac{1}{n}\right), & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$ sürekli int'bilir.




$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{1/2n} 2n^3 x\,dx + \int_{1/2n}^{1/n} -2n^3\left(x-\frac{1}{n}\right)dx = \frac{n}{2}$$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)=0 \qquad \int_0^1 f(x)dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \infty$$

Ayrıca Riemann İntegraline göre $(C[0,1], d_1)$ tam değil.

Ölçü:

Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme ov $\Sigma \subseteq P(X)$ alt kümesi olsun. Eğer,

1) $X \in \Sigma$

2) $S \in \Sigma \Rightarrow S^c \in \Sigma$

3) $S_1, \dots, S_n \in \Sigma$ o.ü $\bigcup_{i=1}^{n} S_i \in \Sigma$ ise $(X, \Sigma)$ cebir denir.

Eğer 1, 2 ve 3') $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$ oü $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \Sigma$ ise $(X,\Sigma)$'ya $\sigma$-cebiri denir.

$S \in \Sigma$ ölçülebilir küme olarak adlandırılır.

- $\emptyset \in \Sigma$
- $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i^c \in \Sigma$

Tanım: $(X, \Sigma)$ bir $\sigma$-cebiri o.ü $\mu: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ bir fonk. olsun. (ölçüsü)

Eğer 1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$ ve $\forall n \neq m$ iken $S_n \cap S_m = \emptyset$ olsun.

$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$ koşulları sağlanıyor ise $\mu$'ye ölçü adı verilir ve

$(X, \Sigma, \mu)$ bir ölçüm uzayıdır.

$S \in \Sigma$ o.ü $\mu(S)=0$ ise $S$'ye sıfır ölçülü küme denir.
ne olduğunu bilmiyorum.
$x \in X$ elemanları $p$-özelliğini sağlasın. Eğer $S = \{x \in X : x$ $p$-özelliğini sağlamasın$\}$

kümesinin ölçüsü sıfır ise $X$ özelliğini hemen hemen her yerde (almost everywhere)

sağlar denir.

ör: Sayma ölçüsü:

$\mathbb{N} = X \neq \emptyset$ ve $\Sigma = P(\mathbb{N})$

$$\mu : P(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,\infty] \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty] \\ 0.\infty = 0, \quad 0.(-\infty) = 0 \\ \infty - \infty \text{ ve } \frac{\infty}{\infty} \text{ tanımsız} \end{array} \right\}$$
$$S \longmapsto \mu(S) = \#(S) = |S|$$

ölçüsüne sayma ölçüsü adı verilir.

$S = \{n\}$, $|S| = 1$

$S = \emptyset$, $|S| = 0$

$S = \mathbb{N}$, $|S| = \aleph_0$ (Alef 0)

• 52'lik desteden 3 çekme olasılığı nedir?

$X = \{A, 2, 3, \ldots, 10, J, Q, K\}$

$P(X) = \Sigma$

$\mu : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ → olasılık ölçüsü

$$0 \leq P(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(X)} \leq 1$$

$$S = \{3^{♠}, 3^{♦}, 3^{♣}, 3^{♥}\}, \quad P(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(X)} = \frac{|S|}{|X|} = \frac{4}{52}$$

ör: Lebesgue ölçüsü

$X = \mathbb{R}$ üzerinde $\Sigma_L$ açık aralıkların oluşturduğu bir $\sigma$-cebiri olsun.

$$\mu_L = \lambda : \Sigma_L \longrightarrow [0,\infty]$$
$$S \longmapsto \lambda(S) \text{ kümenin büyüklüğü}$$

$S = [a,b]$ ise $\lambda(S) = b-a$

$\lambda(S) = 0 \iff$ verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için $S_n \subset \mathbb{R}$ aralıklar dizisi olur öyle ki

$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n) < \varepsilon$ koşullarını sağlıyor ise $(\mathbb{R}, \Sigma_L, \lambda)$ Lebesgue uzayı adını alır.

• $S=\{r\}$ , $r\in\mathbb{R}$

$\forall\varepsilon>0$, $S_n=\left(r-\frac{\varepsilon}{4},\ r+\frac{\varepsilon}{4}\right)$ aralığı vardır öyle ki $S=\{r\}\subset S_n$ ve

$\lambda(S_n)=r+\frac{\varepsilon}{4}-\left(r-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon/2<\varepsilon \iff \lambda(\{r\})=0$

• $S=\{r_1,r_2\}$ , $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ olsun.

$S_1=\left(r_1-\frac{\varepsilon}{8},\ r_1+\frac{\varepsilon}{8}\right)$ ve $S_2=\left(r_2-\frac{\varepsilon}{8},\ r_2+\frac{\varepsilon}{8}\right)$

$\{r_1,r_2\}\subset S_1\cup S_2$ ve $\lambda(S_1)+\lambda(S_2)=r_1+\frac{\varepsilon}{8}-\left(r_1-\frac{\varepsilon}{8}\right)+r_2+\frac{\varepsilon}{8}-\left(r_2-\frac{\varepsilon}{8}\right)=\varepsilon/2<\varepsilon$

$\lambda(S)=\lambda(\{r_1,r_2\})=0$

• $S=\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ $r_n\neq r_m$ eğer $n\neq m$

$\lambda(S)=\lambda(\{r_n\}_{n=1}^{\infty})=\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\{r_n\})=0$ O halde $\lambda(\mathbb{N})=0$

$\lambda(\mathbb{Q})=0$

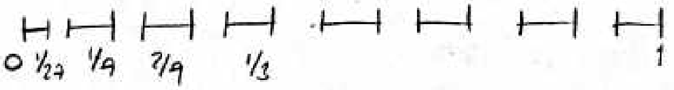
$X=[0,1]$

$(X,\Sigma_L,\lambda)$ Lebesgue ölçüsü

$\lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$

$\lambda(\mathbb{I}\mathbb{Q}\cap[0,1])=1$

Cantor Kümesi:




$C_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$ $\lambda(C_1)=2/3$

$C_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$ $\lambda(C_2)=4/9$

$\lambda(C_3)=8/27$ $\lambda(\text{Cantor})=0$

$A \subset X$ ölçülebilir o.ü karakteristik fonk.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$ şeklinde tanımlanır.

$\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \chi_A(x)$

$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonk.

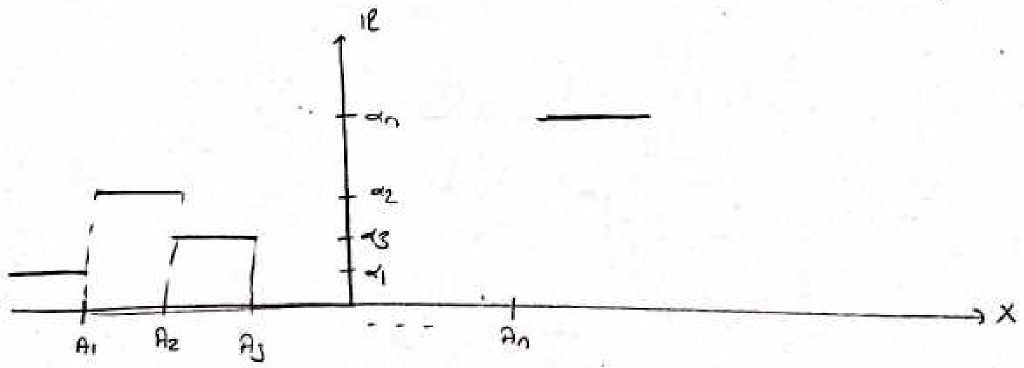
$$x \longmapsto \varphi(x) = \begin{cases} \alpha_1, & x \in A_1 \\ \alpha_2, & x \in A_2 \\ \vdots & \\ \alpha_n, & x \in A_n \end{cases}$$

$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$A_i \cap A_j \neq \phi$

$i_j = \{1, \dots, n\}$

$i \neq j$

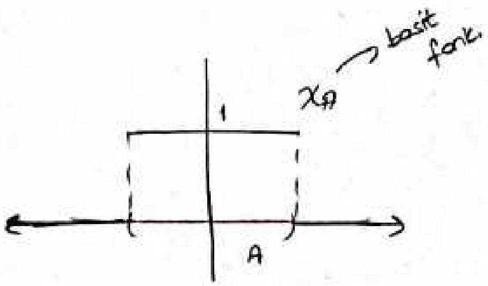



$$\varphi(x) = \alpha_1 \chi_{A_1} + \alpha_2 \chi_{A_2} + \dots + \alpha_n \chi_{A_n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$ şeklinde tanımlanan fonk.'a basit fonk. denir.

Kabul edelim ki $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$ olsun. $\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \mu(A_j)$

! $\mu(A_j) = \infty$ olabilir. $\int_X \varphi \, d\mu = \infty$ olabilir.




$$\int_X \chi_A(x) \, d\mu(x) = \int \left(1 \cdot \chi_A(x) + 0 \cdot \chi_{A^c}(x)\right) d\mu(x)$$

$$= 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(A^c) = \mu(A)$$

$\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$

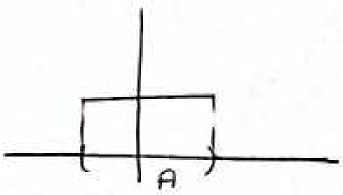
$0 \cdot \infty = 0 \qquad 0 \cdot (-\infty) = 0$

Tanım: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonk. olsun. $((X, \Sigma, \mu)$ ö.u olarak üzere$)$

$\mathbb{R}$'deki ölçülebilir kümelerin ön görüntüsü $X$'te ölçülebilir küme ise

$\left( f^{-1}((a,\infty)) \in \Sigma \right)$ $f$ fonksiyonuna ölçülebilir fonk. denir.

ÖR: $\chi_A$ ölçülebilirdir.



$$\chi_A^{-1}((a,\infty)) = \phi^{\in \Sigma} \quad \text{eğer} \quad a>1$$

$$\chi_A^{-1}((a,\infty)) = A^{\in \Sigma} \quad \text{eğer} \quad 0<a\leq 1$$

$$\chi_A^{-1}((a,\infty)) = X^{\in \Sigma} \quad \text{eğer} \quad a\leq 0$$

ÖRN: Hangi basit fonksiyon ölçülebilir? (Her basit fonk. ölçülebilirdir.)

Lemma: $f$ ve $g$ ölçülebilir iki fonk. olsun. $c \in \mathbb{R}$ o.ü $cf$, $f+g$, $f.g$, $|f|$ ölçülebilirdir.

İspat: $f$ ölçülebilir ise $f^{-1}((a,\infty)) \in \Sigma$

$\Rightarrow (\{x \in X : f(x) > a\}) \in \Sigma$

$(cf)^{-1}((a,\infty)) = (\{x \in X ; cf(x) > a\}) = (\{x \in X ; f(x) > \frac{a}{c}) \in \Sigma$

$c \in \mathbb{R}_-$, $(\{x \in X : f(x) < \frac{a}{c}\}) = (cf)^{-1}\left( (-\infty, \frac{a}{c}) \right) = (cf)^{-1}\left( [\frac{a}{c}, +\infty)^c \right]$

$$= \underbrace{\left( \underbrace{(cf)^{-1}\left( [a,\infty) \right)}_{\in \Sigma} \right)^c}_{\in \Sigma}$$

$(f+g)(x)>a \Rightarrow f(x)>q \wedge g(x)>a-q \quad , q\in\mathbb{Q}$

$(f+g)^{-1}((a,\infty)) = \{x\in X : f(x)+g(x)>a\}$

$= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big( \underbrace{\{x\in X : f(x)>q\}}_{\substack{f \text{ ölçülebilir} \\ \in \Sigma}} \cap \underbrace{\{x\in X : g(x)>a-q\}}_{\substack{g \text{ ölçülebilir} \\ \in \Sigma}} \Big) \in \Sigma$

sayılabilir birleşim için $\mathbb{Q}$ seçtik

$(f\cdot g)^{-1}((a,\infty)) = \{x\in X : f(x)g(x)>a\}$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big( \{x\in X : f(x)>n\} \cap \{x\in X : g(x)>\frac{a}{n}\} \Big) \in \Sigma$

$|f|^{-1}((a,\infty)) = \{x\in X : |f(x)|>a\}$

tümleyeni old.

$= \underbrace{\underset{\in\Sigma}{\{x\in X : f(x)>a\}} \cup \underset{\in\Sigma}{\{x\in X : f(x)<-a\}}}_{\in\Sigma}$

---

$0\le f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\}$

$0\le f^{-}(x) = \max\{-f(x), 0\}$

Eğer $f$ ölçülebilir ise $f^{+}$ ve $f^{-}$ ölçülebilir.

$$\boxed{f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)}$$

## İntegral

$f$ fonk. pozitif ve ölçülebilir bir fonk. olsun.

$$A = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \text{tüm } \varphi \text{ basit fonk. ve } \varphi \leq f \right\}$$

değeri var ise $f$ int'bilir ve $A = \int_X f \, d\mu$ olarak gösterilir.

Tanım: $f$ ölçülebilir bir fonk. olsun.
Eğer $|f|$ int'bilir ise $f$ int.bilir denir.

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

$$|f| \text{ int'bilir} \Rightarrow \int_X |f| \, d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_X f^+ d\mu}_{< +\infty} - \underbrace{\int_X f^- d\mu}_{< +\infty} < +\infty$$

$$L_1(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ int'bilir} \}$$
$$= \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \int_X |f| \, d\lambda < +\infty \}$$
$$= \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_1 < +\infty \}$$

$(L_1, \|.\|_1)$ Banach uzayı

$1 < p < +\infty$

$$L_p(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ p-int.bilir} \}$$
$$= \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \int_X |f|^p \, d\lambda < +\infty \}$$
$$= \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_p < +\infty \}$$

$(L_p, \|.\|_p)$ Banach uzayı

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ aralığında $f$ Riemann $\Rightarrow$ $f$ Lebesgue
$\not\Leftarrow$ Dirichlet fonk.

$[0,\infty)$ aralığında Riemann $\not\Leftrightarrow$ Lebesgue

$(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \underbrace{\mu_c}_{\text{sayma ölçüsü}})$

$\mu_c(S) = |S|$

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olsun.
$n \longmapsto f(n) = a_n$

$f^{-1}((1,\infty)) = \{$bazı $n$'ler$\} \in P(\mathbb{N})$

$f$ intbilir olması $\int_{\mathbb{N}} |f|\, d\mu_c < +\infty$

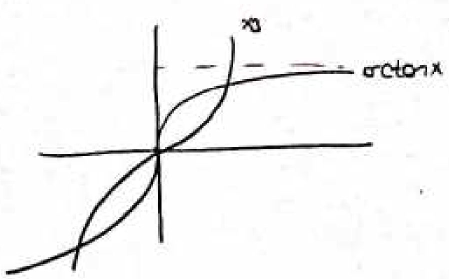
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, \mu_c(\{n\})$$

Eğer ölçü sayma ölçüsü alınırsa ve $X = \mathbb{N}$ olursa $L_p = \ell_p$ olur.

Tanım: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir ölçülebilir fonk. olsun. Bir tane $M>0$ var ve $|f(x)| \le M$ h.h.h $(\mu(\{x\in X : |f(x)| > M\}) = 0)$ ise $f$'e hhh sınırlıdır / esas sınırlıdır.

$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| = \inf\{M : |f(x)| \le M \text{ hhh}\}$

- $f(x) = \arctan x \, \chi_{I\phi}(x) + x^3 \chi_{\phi}(x)$




$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| = \pi/2$

$L_\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_\infty < +\infty\}$

$(L_\infty, \|.\|_\infty)$ Banachtır.