Dinamik Programlama

Dr. Mustafa Çimen

Ders Notları

Ders 9: Kararlı Hâl Olasılıkları

08.12.2017

İçerik

İçindekiler

Kararlı Hâl

- Yalnız değer fonksiyonları değil, olasılıklar da kararlı hâle ulaşır.
- Her bir durumu ziyaret etme olasılığımızı gösterir.
- Politikaların beklenen değerlerinin hesaplanmasında kullanılır.

Bir Örnek

Bir markette iki farklı marka bisküvi satılmaktadır. Market sahibi geçmiş tecrübelerine dayanarak şu olasılıkları hesaplamıştır: Eğer bisküvi alan son müşteri A marka bisküvi aldıysa, bir sonraki müşterinin de A marka bisküvi alma ihtimali % 90'dır. Eğer bisküvi alan son müşteri B marka bisküvi aldıysa, bir sonraki müşterinin de B marka bisküvi alma ihtimali % 80'dir. A marka bisküvi satış başına 2 lira, B marka bisküvi satış başına 2,5 lira kâr getirmektedir. Hangi marka bisküvinin beklenen değeri satıcı için daha yüksektir?

Bir Örnek

Geçiş Olasılıkları Matrisi:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Bir Örnek

İki Dönemlik Geçiş Olasılıkları Matrisi:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$$

Üç Dönemlik Geçiş Olasılıkları Matrisi:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0,78 & 0,22 \\ 0,44 & 0,56 \end{pmatrix}$$

Bir Örnek

Hesaplamaya devam edersek...

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,45 \\ 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 \\ 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{15} = \begin{pmatrix} 0,668 & 0,332 \\ 0,664 & 0,336 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,666 & 0,334 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{25} = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,667 & 0,333 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{30} = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,333 \\ 0,667 & 0,333 \end{pmatrix}$$

Bir Örnek

- Elbette her geçiş olasılıkları matrisinin kararlı hâle geçişini hesaplamak için tekrar tekrar çeşitli kuvvetlerini almamız gerekmez.
- Matris işlemleriyle kararlı hâl olasılıkları matrisi hesaplanabilir.
- Öyle bir matris arıyoruz ki, her bir durumda bulunma ihtimalimiz, geçiş olasılıkları matrisiyle çarpıldığında değişmesin.
- Yani, Φ kararlı hâl olasılıkları matrisi, P ise geçiş olasılıkları matrisiyse;

$$\Phi * P = \Phi \tag{1}$$

olmalıdır.

Bir Örnek

- Yani;

$$\Phi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \tag{2}$$

ise;

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \tag{3}$$

olmalıdır.

Bir Örnek

Matris işlemleriyle aşağıdaki şekilde ilerleyelim:

$$\Phi * P = \Phi$$

Bir Örnek

Matris işlemleriyle aşağıdaki şekilde ilerleyelim:

$$\Phi * P = \Phi$$

$$\Phi * P - \Phi = 0$$

Bir Örnek

Matris işlemleriyle aşağıdaki şekilde ilerleyelim:

$$\Phi * P = \Phi$$
$$\Phi * P - \Phi = 0$$
$$\Phi * (P - 1) = 0$$

Bir Örnek

Matris işlemleriyle aşağıdaki şekilde ilerleyelim:

$$\Phi * P = \Phi$$
$$\Phi * P - \Phi = 0$$
$$\Phi * (P - 1) = 0$$
$$\Phi * (P - \mathcal{I}) = 0$$

Bir Örnek

- Yani;

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,2 & -0,2 \end{pmatrix} = 0$$

Bir Örnek

- Yani;

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,2 & -0,2 \end{pmatrix} = 0$$

- Matriks çarpımı yaptığımızda, aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$-0,1x + 0,2y = 0$$
$$0,1x - 0,2y = 0$$

Bir Örnek

- Bu denklem, Gauss-Jordan işlemleriyle çözülebilir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & -0,2 & 0 \end{array}\right)$$

Bir Örnek

- Bu denklem, Gauss-Jordan işlemleriyle çözülebilir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & -0,2 & 0 \end{array}\right)$$

- İki satırın birbirine paralel olması çözüm bulunmasını engelleyecektir; ancak bu olasılıklarla ilgili $x + y = 1$ (olasılıkların toplamı birdir) denklemini de biliyoruz. İkinci satırı bu denklemle değiştirirsek;

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Bir Örnek

- Artık Gauss-Jordan işlemleriyle çözümü bulabiliriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Bir Örnek

- Artık Gauss-Jordan işlemleriyle çözümü bulabiliriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Bir Örnek

- Artık Gauss-Jordan işlemleriyle çözümü bulabiliriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Bir Örnek

- Artık Gauss-Jordan işlemleriyle çözümü bulabiliriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

Bir Örnek

- Artık Gauss-Jordan işlemleriyle çözümü bulabiliriz:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)
$$

Bir Örnek

- $x = 2/3$, $y = 1/3$ sonucuna ulaştık. Bu sonuç, daha önce matrisin üssünü alarak ulaştığımız sonuçla aynı.

Bir Örnek

- $x = 2/3$, $y = 1/3$ sonucuna ulaştık. Bu sonuç, daha önce matrisin üssünü alarak ulaştığımız sonuçla aynı.
- Bu durum, bir müşterinin uzun vadede A marka bisküvi alma ihtimalinin 0,667, B marka bisküvi alma ihtimalinin 0,333 olduğunu gösterir.

Bir Örnek

- $x = 2/3$, $y = 1/3$ sonucuna ulaştık. Bu sonuç, daha önce matrisin üssünü alarak ulaştığımız sonuçla aynı.
- Bu durum, bir müşterinin uzun vadede A marka bisküvi alma ihtimalinin 0,667, B marka bisküvi alma ihtimalinin 0,333 olduğunu gösterir.
- Beklenen değer hesabıyla kârları hesaplarsak;

$$K_A = 0,667 * 2 = 1,334$$
$$K_B = 0,333 * 2,5 = 0,8325$$

olduğundan, A markasının birim kârı düşük olsa da, uzun vadede beklenen kâr daha yüksektir deriz.

Ders Bitti!

Bir sonraki derste görüşmek üzere...

Dr. Mustafa Çimen